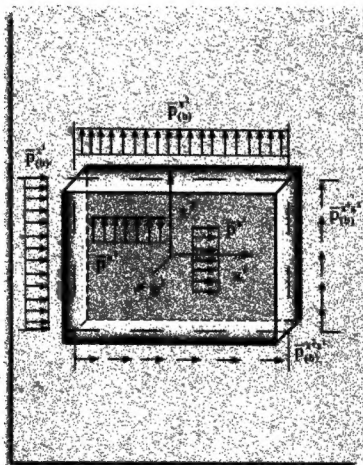


# طرق الطاقة

## في ميكانيك الإنشاءات الخطي

### طرق العناصر المنتهية

#### «الستاتيك»



د. م. سليمان أبو دياب





طرق الطاقة في ميكانيك الإنشاءات الخطي  
طرق العناصر المنتهية «الستاتيك»

- دار الحصاد للنشر والتوزيع: سوريا - دمشق  
برامكة - بجانب وكالة سانا - طابق أول  
هاتف و فاكس: 2126326 ص. ب : 4490
- دار الكلمة للنشر والتوزيع  
دمشق - برامكة جانب سانا: ص.ب: 2229
- الطبعة الأولى ١٩٩٨/١٠٠٠ نسخة
- حقوق النشر محفوظة

الدكتور المهندس سليمان أبو دياب

طرق الطاقة  
في ميكانيك الإنشاءات الخطي  
طرق العناصر المنتهية  
«الستاتيك»



إلى

رجل ظلّته الطبيعة وآمل ألا يظلمه التاريخ

إلى

سعد الله ونوس





## مقدمة

ليس الهدف من هذا الكتاب إيجاد كافة الحلول العالقة لمشاكل نظرية المرونة وإنما يهدف قبل كل شيء إلى تمكين القارئ المبتدئ من الإنماف بالعرض العصري لمشاكل هذه النظرية و تزويده بالمعلومات الضرورية و الأسلوب المنهجي لدخول بمالات البحث العلمي و تحضيره و تنمية قدراته العلمية بحيث يستطيع معالجة معظم مشاكل النظرية . لهذا الغرض تم طرح المسائل التي يجب معالجتها ، بدءاً من أساسياتها و يشكّلها الرياضي العام ثم اختيرت نماذج مبسطة لتوضيح أسلوب المعالجة . ولتجنب الالتباس والغموض في فهم أسلوب المعالجة درست المسائل حتى في تفاصيلها الرياضية والإنشائية. وعرضت المواضيع الإنشائية بمحكمة رياضية معاصرة تعتمد على مبادئ حساب المؤثرات و قواعد حساب المتغيرات .

يتألف الكتاب من سبعة فصول تدرس ميكانيك الإنشاءات في المجال الخطي وتعالج مسائله بطريق العناصر المنتهية . يبدأ الفصل الأول منها بشروحات للمفاهيم الأساسية الإنشائية و الرياضية تتضمن عرضاً للجمل الإحداثية المستخدمة انسجاماً مع مبادئ حساب المؤثرات وتعريفاً لمؤثرة الإجهادات و التشوهات و تحويلاتها بين الجمل الإحداثية المختلفة . و يحتتم الفصل الأول بإيجاز بعض أساسيات قواعد حساب المتغيرات .

يدرس الفصل الثاني معادلات نظرية المرونة الأساسية لحالة جسم فراغي معرض لمؤثرات خارجية وتحدد فيه جوانب للمسائل النظرية في إطارها العام .

تشق مبادئ الطاقة الأساسية وهي مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري ومبدأ الطاقة للمتعة الأصغري في الفصل الثالث و تشرح شروط استخدامها ، وتستخدم مضارب لاغرانج لتعديل مبادئ الطاقة الأساسية من أجل الحصول على مبادئ الطاقة الموسعة . وهذه المبادئ تشكل إلى جانب قواعد حساب المتغيرات الأساس النظري لمعالجة المنشآت وفق طرق العناصر المنتهية .

و كمثال تعليمي نموذجي تعرض في الفصل الرابع طريقة العناصر المنتهية \_ نموذج الانتقالات لحل الجوائز الشبكية المستوية و الفراغية المعرضة للحمولات و المؤثرات الخارجية كالتأثيرات الحرارية وهبوط المساند و تعالج حالة وجود التوايض فيها .

يعالج الفصل الخامس الإطارات المستوية و الفراغية بطرق العناصر المنتهية و تشرح بإسهاب طريقة العناصر المنتهية \_ نموذج الانتقالات و طريقة العناصر المنتهية \_ النموذج المحين للإجهادات ويقترح نموذج آخر لطريقة العناصر المنتهية يتم فيه إجراء تعديل في أساسيات الطريقة على أساس اعتبار المؤثرات الخارجية على المستوى التفاضلي للعنصر المنتهي . و تقارن نتائج الطرق السابقة مع الحل الدقيق و مع بعضها البعض .

يخصص الفصل السادس لدراسة طرق العناصر المنتهية السابق ذكرها في حل البلاطات الرقيقة المنسوبة سواء إلى جملة إحداثيات ديكارتية أم إلى جملة إحداثيات طبيعية (منحنية) و ذلك لتمكين القارئ من معالجة طولوجيات هندسية معقدة . يبدأ الفصل بشرحات للتعريف الأساسية للخواص الهندسية التفاضلية للعناصر المنتهية ذات الأشكال الهندسية غير المنتظمة و تشرح المفاهيم الأساسية في مبادئ حساب المؤثرات و قواعد تحويلها . كما تصاغ معادلات نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية انطلاقاً منها في الإحداثيات الديكارتية و يحتتم الفصل بإجراء تطبيقات طرق العناصر المنتهية في إطار الإحداثيات الطبيعية .

و يخصص الفصل السابع لدراسة الشرائح والمنشآت المثنية المستوية . ويختتم الكتاب بملاحق توضع فيها بعض أنواع التوابع المستخدمة في عمليات التقريب والخطوط الأساسية لكيفية إجراء التكامل العددي و نصوص بلغة الـ C لبرامج مختلفة وملاحظات ختامية حول العلاقة المتبادلة بين طرق العناصر المنتهية المختلفة في ضوء أسلوب معالجة مختلف لطرق العناصر المنتهية.

## فهرس الكتاب

### مقدمة

- 1- مفاهيم أساسية إنشائية ورياضية
  - 1-1- حمل المحاور الإحداثية
  - 1-2- مؤثرة الإجهادات و صيغة كوشي
  - 1-3- تحويل مركبات الإجهادات
  - 1-4- الإجهادات الرئيسية و المستويات الرئيسية
  - 1-5- مؤثرة التشوهات
  - 1-6- تحويل مؤثرة التشوهات
  - 1-7- تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي
  - 1-8- مقدمة في حساب المتغيرات
  - 1-8-1- وصف عام لمسائل حساب المتغيرات
  - 1-8-2- تعريف المتغير
  - 1-8-3- قابلية تبديل تنالي المتغير الأول و المشتق الأول
  - 1-8-4- معادلة أويلر التفاضلية
  - 1-8-5- تعلق التآبي بعدد من التوابع
  - 1-8-6- متغير تابع متعلق بعدة توابع
  - 1-9- المبرهنات الأساسية لحساب المتغيرات
  - 1-9-1- المبرهنة الأولى
  - 1-9-2- المبرهنة الثانية
  - 1-9-3- المبرهنة الثالثة
  - 1-9-4- المبرهنة الرابعة
  - 1-10- حلول للمعادلة التكميلية

- 1-1- المصادر العلمية
- 2- معادلات نظرية المرونة
  - 1-2- معادلات التوازن
  - 2-2- علاقات التشوهات- الانتقالات
  - 2-3- قانون للمادة
  - 2-4- شروط التوافق
  - 2-5- المعادلات التفاضلية العامة لنظرية المرونة
  - 2-6- الشروط الطرفية
    - 2-6-1- الشروط الطرفية الهندسية
    - 2-6-2- الشروط الطرفية الميكانيكية
    - 2-7- ملاحظات حول قابلية الحل
- 3- مبادئ الطاقة الأساسية و الموسعة
  - 3-1- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري
    - 3-1-1- العمل الداخلي الكامن لقوى التشوه
    - 3-1-2- عمل القوى الخارجية
    - 3-1-3- اشتقاق مبدأ الطاقة الكامنة
    - 3-1-4- شروط استخدام مبدأ الطاقة الكامنة
  - 3-2- مبدأ الطاقة للمتعة الأصغري
    - 3-2-1- العمل الداخلي للمتمم
    - 3-2-2- اشتقاق مبدأ الطاقة المتتمة
    - 3-2-3- شروط استخدام مبدأ الطاقة للمتتمة الأصغري
  - 3-3- مبادئ الطاقة الموسعة
    - 3-3-1- مضارب لاغرنج و النهايات الحدية لتتابع بعدة متحولات مستقلة
    - 3-3-2- مبدأ الطاقة للمتتمة المعدل

#### 4- معالجة الجوانب الشبكية بطريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات

4-1- معادلات نظرية المرونة لقضيب من حائط شبكي

4-2- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

4-3- خواصزيميات طريقة العناصر المنتهية-نموذج الانتقالات

4-4- عنصر منتهي لجائز شبكي مستوي

4-4-1- مصفوفة القساوة في المحاور الإحداثية العامة

4-4-2- شعاع الحمولات الخارجية المكافئة في المحاور الإحداثية العامة

4-4-3- حالة التأثيرات الحرارية

4-4-4- حالة هبوط المساند

4-4-5- معالجة النواض

4-5- عنصر منتهي لجائز شبكي فراغي

#### 5- معالجة الإطارات المستوية و الفراغية بطريقة العناصر المنتهية

5-1- تخفيض عدد مجاهيل نظرية المرونة

5-2- معادلات نظرية المرونة

5-2-1- معادلات التوازن

5-2-2- علاقات التشوهات-الانتقالات

5-2-3- قانون السلوك

5-2-4- علاقات قوى المقطع - الانتقالات

5-3- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

5-4- عنصر منتهي إطاري فراغي-نموذج الانتقالات

5-5- عنصر منتهي إطاري فراغي-النموذج المحين

5-5-1- الطاقة المتممة المعللة لوسط مقسم إلى عناصر منتهية

5-5-2- خواصزيميات الطريقة المحينة

- 5-6- اقتراحات لمعالجة طرق العناصر المنتهية
- 5-6-1- عموميات ربط التوابع التقريبية بمحولات العنصر و درجات الحرية
- 5-6-2- عنصر إطارى فراغى بتوابع تقريبية متعلقة بمحولات العنصر .
- 5-7- الإطارات المستوية
- 5-7-1- نموذج الانتقالات
- 5-7-2- النموذج المحجى للإجهادات
- 5-7-3- التطبيق للمقترح لنموذج الانتقالات مع اعتبار الحمولة .
- 5-8- المصادر العلمية
- 6- عناصر منتهية لحل البلاطات الرقيقة
- 6-1- استخدام التوابع التقريبية في التحويل بين الإحداثيات الطبيعية ( المنحنية ) و الديكارتية
- 6-1-1- الإحداثيات الطبيعية و اختيار التوابع التقريبية
- 6-1-2- شعاع المكان لنقطة ما لا على التعمين
- 6-1-3- أشعة القاعدة الأساسية
- 6-1-4- المعاملات المترية الأساسية
- 6-1-5- العنصر المساحي
- 6-1-6- المعاملات المترية الضدية
- 6-1-7- أشعة القاعدة الضدية
- 6-1-8- تحويل الانتقالات بين الإحداثيات الديكارتية و الطبيعية
- 6-1-9- المشتق الأساسي
- 6-1-9-1- المشتق الأساسي لقيمة سلمية
- 6-1-9-2- المشتق الأساسي لمركبات شعاع
- 6-1-10- تعريف الجداء للوترى و الموترة
- 6-1-10-1- تعريف الجداء الموترى
- 6-1-10-2- تعريف الموترة

- 6-2- نظرية المرونة في الإحداثيات الديكارتية
- 6-2-1- مجاهيل نظرية المرونة
- 6-2-2- معادلات نظرية المرونة في الإحداثيات الديكارتية
- 6-2-2-1- معادلات التوازن
- 6-2-2-2- معادلات التشوهات - الانتقالات
- 6-2-2-3- قانون السلوك
- 6-2-2-4- علاقات قوى للمقطع - الانتقالات
- 6-2-3- المعادلات التفاضلية للمسألة
- 6-2-4- الشروط الطرفية
- 6-2-5- حساب الإجهادات المتبقية
- 6-2-6- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري
- 6-3- نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية
- 6-3-1- مجاهيل نظرية المرونة
- 6-3-2- معادلات نظرية المرونة
- 6-3-2-1- معادلات التوازن
- 6-3-2-2- علاقات التشوهات - الانتقالات
- 6-3-2-3- قانون السلوك
- 6-3-2-4- علاقات قوى المقطع - الانتقالات
- 6-3-3- المعادلة التفاضلية
- 6-3-4- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري
- 6-4- عنصر منتهي مستطيل من نموذج الانتقالات
- 6-5- عنصر منتهي مستطيل من النموذج المجهن للإجهادات
- 6-6- عنصر منتهي - نموذج الانتقالات بتواضع تقريبية متعلقة بالحمولات في الإحداثيات الطبيعية

## 7-الشرائع الرقيقة

7-1- معادلات نظرية المرونة في الإحداثيات الديكارتية

7-1-1- مجاهيل نظرية المرونة

7-1-2- معادلات نظرية المرونة

7-1-2-1- معادلات التوازن

7-1-2-2- علاقات التشوهات \_ الانتقالات

7-1-2-3- قانون السلوك

7-1-2-4- علاقات قوى المقطع \_ الانتقالات

7-1-3- المعادلة التفاضلية

7-1-4- الشروط الطرفية

7-1-4-1- الشروط الطرفية الهندسية

7-1-4-2- الشروط الطرفية الميكانيكية

7-1-5- توابع الإجهادات ( توابع AIRY)

7-2- عنصر شريحة منتهي مستطيل من النموذج المجهين للإجهادات

7-3- عنصر منتهي مستطيل مهين لحل مسائل المنشآت المثنية المستوية

ملاحق الكتاب وملاحظات ختامية والمصطلحات العلمية



## 1- مفاهيم أساسية إنشائية و رياضية

### 1-1- جل المحاور الإحداثية

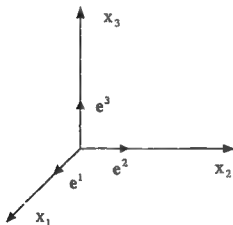
قبل البدء بكتابة معادلات نظرية المرونة لابد من تعريف الجاهيل التي نود البحث عنها في نطاق هذه النظرية و لابد أيضا من طرح و توضيح للمعطيات المتوافرة لدينا أثناء بحثنا لهذه النظرية . و قبل البدء بالتحدث عن هذه الجاهيل أو هذه المعطيات يجب نسبها إلى جملة إحداثية ما وربما عدة جل إحداثية. نماشيا مع التطور العلمي الحديث نجد أنه من المفيد اعتماد الأساليب الحديثة في صياغة معادلات نظرية المرونة . هذه الصياغة تعتمد في أساليبها على قواعد جديدة نسبيا يطلق عليها اسم قواعد حساب الموترات، لذلك نرى أنه من الأنسب بدء هذا الفصل بشروحات أساسية في علم قواعد حساب الموترات . لنحاول الآن التحرر من مفهوم الجمل الإحداثية الديكارتية الثابتة، و التي يرمز لتحولاتها المستقلة عادة  $(x,y,z)$  . ولنغير في البداية رموز هذه المتحولات بحيث تصبح  $(x^1, x^2, x^3)$ ، حيث نكتب القرائن 1,2,3 على أعلى المتحولات ( قرائن مرتفعة ) و لنفرض أن شعاع الواحدة على المحور  $x^1$  هو  $e_1$  و على  $x^2$  هو  $e_2$  و على  $x^3$  هو  $e_3$  و قرائن الأشعة الواحدة تكتب في الأسفل ( قرائن منخفضة ). باعتبار أننا نكتب الآن معادلات نظرية المرونة في جملة الإحداثيات الديكارتية سنفرض أن الجملة  $(x^1, x^2, x^3)$  هي جملة متعامدة نظامية و أشعتها الواحدة  $(e_1, e_2, e_3)$  و سنسمي هذه الجملة جملة القاعدة الأساسية (شكل 1-1) . في الحالة العامة يمكن أن تكون هذه الجملة جملة إحداثيات منحنية (جل الإحداثيات الأسطوانية، جل الإحداثيات الكروية، ....) عندها يرمز لأشعتها الأساسية  $(g_1, g_2, g_3)$  و تكون طويلة أشعتها الأساسية غير مساوية للواحد . رغم أن اشتقاق معادلات نظرية المرونة يتم في جملة إحداثية ديكارتية إلا أننا ستنبع الأسلوب الحديث في صياغة هذا الاشتقاق بحيث إذا ما انتقل المرء إلى اشتقاق هذه المعادلات في جملة إحداثية منحنية فإنه، لن يجد أسلوب الصياغة غير مألوف . لنرى الآن ما الفائدة من تغيير رموز الجملة الديكارتية و أشعتها الأساسية .

ليكن لدينا جسم ما أو وسط منسوب إلى جملة القاعدة الأساسية، شعاع المكان لنقطة ما لا على التعيين إحداثياتها  $(x^1, x^2, x^3)$  من هذا الجسم يعبر عنه بالشكل :

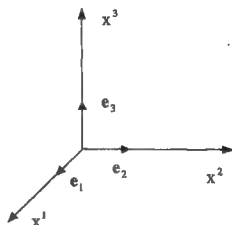
$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

الأحرف الفارقة  $\mathbf{e}$  استخدمت للدلالة على أن هذا المقدار شعاعي بدل استخدام الرمز القديم المعروف  $\vec{e}$ ، و هذا الاصطلاح متبعه في سياق هذا الكتاب. نستخدم الآن اصطلاح اينشتاين (Einstein) لاختصار شكل كتابة مجموع المضاريب في العلاقة (1.1) و الذي يقول أنه إذا وردت قرينة ما مرتين في جداء مضاريب ، مرة في الأسفل و مرة في الأعلى يفهم ضمناً أن الجمع يتم على هذه القرينة و يستغنى عن كتابة رمز المجموع  $\sum$  . بناءً على هذا الاصطلاح نكتب العلاقة (1.1) بالشكل :

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$



شكل 2-1 جملة القاعدة الضدية



شكل 1-1 جملة القاعدة الأساسية

لنعرف الآن جملة إحداثيات أخرى متحولاتها المستقلة  $(x_1, x_2, x_3)$  نكتب قرائنها في الأسفل (قرائن منخفضة) وأشعتها الأساسية  $(e^1, e^2, e^3)$  نكتب قرائنها في الأعلى (قرائن مرتفعة). في الحالة العامة تكون جملة الإحداثيات هذه أيضاً منحنية عندها يرمز لأشعة قاعدتها  $(g^1, g^2, g^3)$

و تكون طويلة هذه الأشعة غير مساوية للواحد. لنسمي الجملة الجديدة جملة القاعدة الضدية (شكل 1-2) . و لنفرض أن العلاقات بين أشعة القاعدة الأساسية و أشعة القاعدة الضدية هي :

$$\begin{aligned} e_1.e^1 &= 1 ; e_1.e^2 = 0 ; e_1.e^3 = 0 \\ e_2.e^1 &= 0 ; e_2.e^2 = 1 ; e_2.e^3 = 0 \\ e_3.e^1 &= 0 ; e_3.e^2 = 0 ; e_3.e^3 = 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

و باستخدام الكتابة بالقرائن تلتخص هذه المعادلات بالمعادلة الوحيدة التالية :

$$e_i.e^j = \delta_i^j \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

حيث  $\delta_i^j$  هو ما يعرف بموتره كرونكر، و تعرف كما يلي :

$$\delta_i^j = 1 \quad \text{if} \quad i = j \quad (1.5)$$

$$\delta_i^j = 0 \quad \text{if} \quad i \neq j$$

هذه العلاقات تنطبق أيضاً على جمل الأشعة  $(g_1, g_2, g_3)$  ،  $(g^1, g^2, g^3)$  في الإحداثيات المنحنية . تستخدم موتره كرونكر لاستبدال قرينة بأخرى كما سنرى لاحقاً . الجداءات السلمية لأشعة القاعدة الأساسية ببعضها البعض تسمى "المعاملات المترية الأساسية" و يرمز لها في حالة الإحداثيات المنحنية  $g_{ij}$  و يرمز لها في حالة الإحداثيات الديكارتية للمتعامدة النظامية  $\delta_{ij}$  :

$$e_i . e_j = \delta_{ij} \quad (1.6)$$

و ذلك لأنها مكافئة للمصفوفة الواحدية أو موتره كرونكر . و الجداءات السلمية لأشعة القاعدة الضدية متسمى "المعاملات المترية الضدية" و هي في حالة الإحداثيات الديكارتية للمتعامدة النظامية مساوية لموتره كرونكر  $\delta^{ij}$

$$e^i . e^j = \delta^{ij} \quad (1.7)$$

يمكن التعبير عن جملة أشعة القاعدة الأساسية بدلالة أشعة القاعدة الضدية و بالعكس . و تبين الطريقة التالية إمكانية هذا الانتقال بين الجملتين حيث سنوردها هنا فقط لحالة الجمل الإحداثية الديكارتية النظامية و يمكن استنتاجها لحالة الجمل المنحنية بالقياس . يمكن كتابة أشعة القاعدة الضدية بدلالة أشعة القاعدة الأساسية بالشكل :

$$e^1 = A^{11}e_1 + A^{12}e_2 + A^{13}e_3$$

$$e^2 = A^{21}e_1 + A^{22}e_2 + A^{23}e_3 \quad (1.8)$$

$$e^3 = A^{31}e_1 + A^{32}e_2 + A^{33}e_3$$

أو باختصار :

$$e^i = A^j e_j \quad (1.9)$$

حيث  $A^j$  معاملات يجب تعيينها .

نضرب العلاقة السابقة بأشعة القاعدة الضدية  $e^K$  فنحصل على:

$$e^i \cdot e^K = A^j e_j \cdot e^K \quad (1.10)$$

و بملاحظة العلاقتين (1.7) و (1.4) ينتج :

$$\delta^{ik} = A^j \delta_j^k \quad (1.11)$$

الطرف اليميني في العلاقة (1.11) هو جداء مضارب ، يتم الجمع فيه على القرينة  $j$  أما القرنتان  $k$  و  $i$  فهما قرنتان مستقلتان و لا يتم عليهما الجمع . و هذا الجداء يكون له قيمة في حالة  $j$  مساوية  $k$  ( انظر تعريف موثر كرونكر ) و مساو للصفر في حالة اختلاف  $j$  عن  $k$  ، إذاً يمكن الإستغناء عن القرينة  $j$  و استبدالها تماماً بالقرينة  $k$  أي أن :

$$A^j \delta_j^k = A^{ik} \quad (1.12)$$

و هذه العلاقة هي خاصية أساسية لموتر كرونكر حيث يتم بواسطتها استبدال قرينة بلأخرى . و بالرجوع إلى العلاقة (1.11) نرى أن :

$$\delta^{ik} = A^{ik} \quad (1.13)$$

أي أن الانتقال من جملة أشعة القاعدة الأساسية إلى جملة أشعة القاعدة الضدية يتم بواسطة المعاملات المترية الضدية و التي تكون في حالة المحاور الإحداثية الديكارتية النظامية مساوية للمصفوفة الواحدية  $\delta^{ij}$  و تكون في حالة جملة المحاور الإحداثية المنحنية مختلفة عنها ( $g^{ij} \neq \delta^{ij}$ )

$$e^i = \delta^{ij} e_j \quad (1.14)$$

و بشكل مماثل نرى أن :

$$e_i = \delta_{ij} e^j \quad (1.15)$$

و بالتدقيق في العلاقتين (1.14) و (1.15) يمكن الاستنتاج أنه تم رفع و خفض القرائن ( أو التحويل بين جمل الأشعة المختلفة ) بواسطة المعاملات المترية الأساسية والمعاملات المترية الضدية . حيث تم في العلاقة (1.14) رفع القرينة ز عن طريق الضرب بالمعاملات الضدية ، و في العلاقة (1.15) تم خفض القرينة ز عن طريق الضرب بالمعاملات المترية الأساسية . و هذه القواعد محققة أيضاً لأشعة أخرى منسوبة إلى إحدى الجملتين كشعاع الانتقالات لجسم ما مثلاً .

$$u = u_i e^i = u^i e_i \quad (1.16)$$

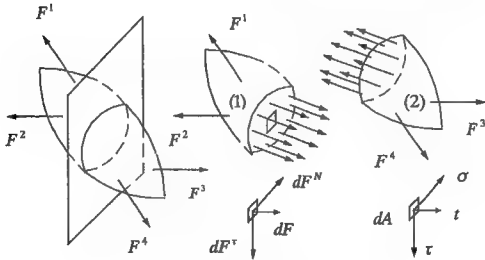
حيث  $u_i$  المركبات الأساسية،  $u^i$  المركبات القاعدية الضدية و بتطبيق هذه القواعد نجد أن :

$$u_i = \delta_{ij} u^j \quad (1.17)$$

$$u^i = \delta^{ij} u_j \quad (1.18)$$

بالطبع هذه المقدمة البسيطة لاتفني عن الرجوع إلى المفاهيم الأساسية لعلم حساب المؤثرات و يجب النظر إليها فقط كعامل مساعد في فهم ما سيتبع من صياغة لمعادلات نظرية المرونة و سيتم التعرض بتفصيل أكبر لمبادئ حساب المؤثرات في الجمل المنحنية في الفصل السادس من هذا الكتاب .

## 1-2- مولدة الإجهادات وصيغة كوشي



شكل 1-3 : القوى الداخلية و الإجهادات الداخلية .

بنتيجة الحملات الخارجية على الأوساط الإنشائية أو الأجسام تتولد فيها قوى داخلية تحافظ على تماسكها. لتصور مقطعاً في جسم ما متوازن تحت تأثير مجموعة قوى خارجية . فكل جزء من أجزائه يجب أن يكون متوازناً تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليه والقوى الداخلية التي تظهر بنتيجة القطع ، وبالإضافة إلى ذلك يجب أن تكون القوى الداخلية على طرفي المقطع متساوية و متعاكسة وفق ما يقتضيه قانون نيوتن الثالث للفعل ورد الفعل شكل 1-3 .

بفرض أن  $dF$  عصلة القوى المؤثرة على عنصر تفاضلي  $dA$  من سطح المقطع، تسمى القوة المؤثرة على وحدة السطح بالإجهاد:

$$t = \frac{dF}{dA} \quad (1.19)$$

و القوة  $dF$  المؤثرة على وحدة السطح يمكن دوماً تحليلها إلى قوة عمودية على السطح  $dF^n$  وقوة مماسية لهذا السطح  $dF^t$  . تسمى القوة الناعمة على وحدة السطح بالإجهاد الناعمي و يرمز له عادة كما يلي:

$$\sigma = \frac{dF^n}{dA} \quad (1.20)$$

و تسمى القوة المماسية على وحدة السطح بالإجهاد المماسي و يرمز له بالشكل:

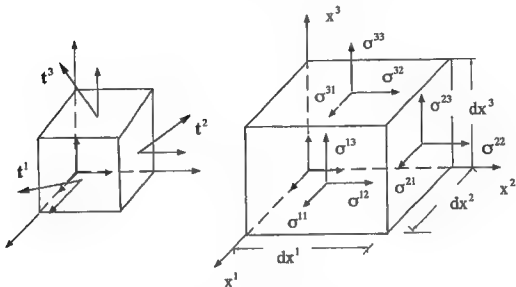
$$\tau = \frac{dF^t}{dA} \quad (1.21)$$

و يتم عادة تحليل الأخيرة إلى مركبتين متعامدتين مع بعضهما البعض .

و لتحديد حالة الإجهادات في نقطة ما من الجسم نستعين بجملة عاور إحداثية ديكارتية قائمة و تكون جملة القاعدة الأساسية  $(x^1, x^2, x^3)$  بأشعتها الواحدية  $(e_1, e_2, e_3)$  .

في مقطع ناظمه المحور  $x^1$  و على بعد  $x^1 = \text{const}$  يكون للإجهادات ثلاث مركبات كما أسلفنا و هي الإجهاد الناعمي  $\sigma^{11}$  و الإجهاد المماسي  $\tau^{12}$  و الإجهاد المماسي  $\tau^{13}$  . القرينة الأولى للإجهاد تدل على اتجاه الناظم للمساحة المجهد أو المحور العمودي على مركبة الإجهاد و القرينة الثانية تدل على اتجاه مركبة الإجهاد أو المحور الموازي لهذه المركبة . و سوف تستخدم في سياق هذا الكتاب الرمز  $\sigma$  أيضاً للإجهاد المماسي أي أننا سنكتب بدلاً من  $\tau^{12}$  الرمز  $\sigma^{12}$  و

بدلاً من  $\tau^{13}$  الرمز  $\sigma^{13}$  . و بشكل مماثل نستطيع أيضاً تحديد مركبات الإجهاد في مقطع ما  $x^2 = \text{const}$  و في مقطع  $x^3 = \text{const}$  (شكل 1-4) .



شكل 1-4 : مركبات الإجهادات على عنصر  
تفاضلي بشكل متوازي مستطيلات مقطوع  
شكل 1-5 : جميع مركبات الإجهادات  
على وجوه متوازي المستطيلات  
من الوسط يمكن ترتيب مركبات الإجهاد التسعة بالشكل التالي :

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix}; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.22)$$

و نظراً لخواص التحويل التي تمتلكها مركبات الإجهاد المرتبة هذه نطلق على مثل هذا التركيب موثقة الإجهادات (ستعرف على الموترات و خواصها في الفصول اللاحقة) . بافتراض أن أبعاد متوازي المستطيلات المقطوع تفاضلية و أن  $t^1, t^2, t^3$  هي أشعة محصلة الإجهادات على الأوجه التي نواظمها المحاور  $x^1, x^2, x^3$  على التوالي (شكل 1-5) يكون :

$$t^1 dx^2 dx^3 = \sigma^{11} e_1 dx^2 dx^3 + \sigma^{12} e_2 dx^2 dx^3 + \sigma^{13} e_3 dx^2 dx^3$$

$$\begin{aligned} t^2 dx^1 dx^3 &= \sigma^{21} e_1 dx^1 dx^3 + \sigma^{22} e_2 dx^1 dx^3 + \sigma^{23} e_3 dx^1 dx^3 \\ t^3 dx^1 dx^2 &= \sigma^{31} e_1 dx^1 dx^2 + \sigma^{32} e_2 dx^1 dx^2 + \sigma^{33} e_3 dx^1 dx^2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

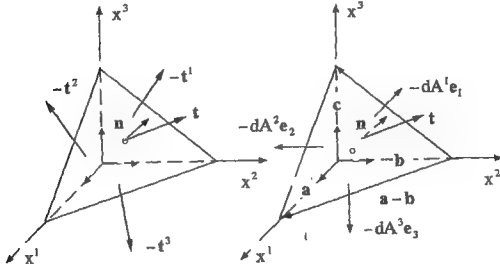
و بعد الاختصار يكون :

$$\begin{aligned} t^1 &= \sigma^{11} e_1 + \sigma^{12} e_2 + \sigma^{13} e_3 \\ t^2 &= \sigma^{21} e_1 + \sigma^{22} e_2 + \sigma^{23} e_3 \\ t^3 &= \sigma^{31} e_1 + \sigma^{32} e_2 + \sigma^{33} e_3 \end{aligned} \quad (1.24)$$

و باستخدام اصطلاح انشتاين يصبح التعبير المختصر للعلاقة السابقة:

$$t^i = \sigma^{ij} e_j \quad (1.25)$$

و قبل حساب محصلة الإجهادات الكلية  $t$  المؤثرة في مقطع ما نأخذ (الشعاع  $\pi$ ) (شكل 7-1) ستعرف على المساحات الموجهة و بحسب مساقط شعاع الناظم للمقطع المطلوب حساب محصلة الإجهادات الكلية فيه بدلالة هذه المساحات .



شكل 7 : هرم مقطع من الجسم  
محصلة الإجهاد الكلية  $t$

شكل 6 : هرم مقطع من الجسم  
المساحات الموجهة ، أشعة النواظم



تمثل المساحات الموجهة المحاطة بمنحني مغلق بشعاع عمودي على المساحة المعتبرة و إتجاهه يحدد وفق قاعدة اليد اليمنى . فإذا ما دارت أصابع اليد اليمنى على المنحني بعكس إتجاه عقارب الساعة اتخذ ناظم المساحة هذه إتجاه إصبع اليد اليمنى و طوليلة هذا الشعاع مساوية لقيمة المساحة. لتكن  $dA^1, dA^2, dA^3$  قيم المساحات التي نواظمها المحاور  $x^1, x^2, x^3$  على التوالي أو الأشعة  $(e_1, e_2, e_3)$ . هذه المساحات يمكن التعبير عنها بالأشعة التالية :

$$\begin{aligned} dA^1 e_1 &= \frac{1}{2} (b \wedge c) \\ dA^2 e_2 &= \frac{1}{2} (c \wedge a) \\ dA^3 e_3 &= \frac{1}{2} (a \wedge b) \end{aligned} \quad (1.26)$$

و مساحة المقطع الذي نواظمه الشعاع  $n$  يعبر عنه بالعلاقة :

$$dA \cdot n = \frac{1}{2} (c - b) \wedge (a - b) = \frac{1}{2} [(c \wedge a) - (c \wedge b) - (b \wedge a)] \quad (1.27)$$

حيث  $dA$  قيمة مساحة المقطع، وذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار أن الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين معدوم (وبالتالي الجداء الخارجي للشعاع في نفسه) بالمقارنة بين (1.26) و (1.27) بعد ملاحظة أن  $(b \wedge c) = - (c \wedge b)$  نجد أن :

$$dA n = dA^1 e_1 + dA^2 e_2 + dA^3 e_3 = dA^1 e_1 \quad (1.28)$$

بضرب هذه العلاقة بالأشعة الواحدية  $e_j$  سوف نجد بعد ملاحظة العلاقة (1.17) أن :

$$dA(n e^j) = dA^1 e_1 e^j = dA^1 \delta_1^j = dA^j \quad (1.29)$$

إذا ما عبرنا عن الآن عن شعاع الناظم بدلالة مركباته  $n^1, n^2, n^3$  على المحاور الإحداثية  $x^1, x^2, x^3$  على التوالي بالشكل :

$$n = n^1 e_1 + n^2 e_2 + n^3 e_3 = n^i e_i \quad (1.30)$$

نحصل بتعميض هذه العلاقة في العلاقة (1.28) . على :

$$dA(n^i e_i e^j) = dA(n^i \delta_i^j) = dA n^j = dA^j \quad (1.31)$$

و بالتالي يمكن حساب مركبات شعاع الناظم بدلالة قيم مساحات وجوه الهرم بالشكل :

$$n^j = \frac{dA^j}{dA} \quad (1.32)$$

لنعد الآن إلى حساب محصلة الإجهادات الكلية المؤثرة على المقطع الذي ناظمه الشعاع  $n$ . إن توازن الهرم المقطوع تحت تأثير القوى المطبقة عليه (شكل 7) يقتضي أن يكون :

$$tdA = t^1 dA_1 + t^2 dA_2 + t^3 dA_3 \quad (1.33)$$

و ذلك بعد إهمال القوى الحجمية ( وزن الهرم ) الموزعة في حجم الهرم المقطوع . بقسمة طرفي العلاقة السابقة على  $dA$  بعد استعمال العلاقة (1.29) نحصل على :

$$\begin{aligned} t &= t^1(n \cdot e_1) + t^2(n \cdot e_2) + t^3(n \cdot e_3) \\ &= n(t^1 e_1 + t^2 e_2 + t^3 e_3) = n t^j e_j \end{aligned} \quad (1.34)$$

تسمى القيمة السلمية :

$$\sigma = t^1 e_1 + t^2 e_2 + t^3 e_3 = t^j e_j \quad (1.35)$$

المكائن المزدوج للإجهادات ( stress dyadic ) و يمكن كتابتها بدلالة موثر الإجهادات  $\sigma$  بصورتي العلاقة (1.25) في العلاقة (1.34) بالشكل :

$$\sigma = \sigma^j e_j e_i \quad (1.36)$$

يتصف المكائن المزدوج للإجهادات بالثبات عند نسب الإجهادات إلى جمل محاور إحداثية مختلفة . و بالعودة إلى العلاقة (1.34) سوف نجد أن محصلة الإجهاد الكلية المؤثرة على المقطع الذي ناظمه  $n$  مساوية للتالي :

$$t = \sigma \cdot n \quad (1.37)$$

و لكتابة هذه العلاقة تفصيلاً نعوض العلاقتين (1.30) و (1.36) في العلاقة (1.37) فنحصل على صيغة كوشي للإجهادات :

$$t = \sigma^j e_j n^k e_k = \sigma^j e_j n^k \delta_{jk} = \sigma^j n_j e_i \quad (1.38)$$

$n_j$  هي مركبات شعاع الناظم المنسوبة إلى الجملة القاعدية الضدية . و للحصول على مركبات  $t$  و التي سيرمز لها  $t^1(N), t^2(N), t^3(N)$  نميزها عن مركبات الإجهادات المحصلة على أوجه

متوازي المستطيلات ، يكفي أن نكتب الطرف الأول من العلاقة (1.38) بدلالة هذه المركبتين و نقارن الطرف الأول مع الطرف الثاني لنجد أن :

$$t_{(N)}^i = \sigma^{ij} n_j \quad (1.39)$$

و الشكل التفصيلي لهذه العلاقة هو :

$$(t_{(N)}^1, t_{(N)}^2, t_{(N)}^3) = (n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

وتعطي المركبتين النظامية و الماسية لمحصلة الإجهادات الكلية هذه بالعلاقين التاليين على التوالي :

$$t_n = t \cdot n = \sigma^{ij} n_j n_i \quad (1.41)$$

$$t_s = \sqrt{|t|^2 - (t_n)^2} \quad (1.42)$$

### 1-3 تحويل مركبات الإجهادات :

للتعبير عن مركبات الإجهادات  $\sigma^{ij}$  المنسوبة إلى جملة المحاور الإحداثية الديكارسية  $(x^1, x^2, x^3)$  بأشعتها الأساسية  $(e_1, e_2, e_3)$  بدلالة مركبات الإجهادات  $\sigma^{\bar{k}i}$  المنسوبة إلى جملة المحاور الإحداثية  $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}})$  بأشعتها الأساسية  $(e_{\bar{1}}, e_{\bar{2}}, e_{\bar{3}})$  والتي تربط بين أشعتهما الأساسية علاقة التحويل :

$$e_{\bar{k}} = a_{\bar{k}}^i e_i \quad (1.43)$$

حيث  $a_{\bar{k}}^i$  معاملات التحويل بين الجملتين . نعر عن المكافئ المزدوج للإجهادات  $\sigma$  في الجملتين كما يلي :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^{ij} e_i e_j = \sigma^{\bar{k}i} e_{\bar{k}} e_i \\ &= \sigma^{\bar{k}i} a_{\bar{k}}^j a_i^l e_j e_l \end{aligned} \quad (1.44)$$

و بعد نقل الطرف الثاني إلى الطرف الأول و إخراج الجداء  $e_i e_j$  خارج قوسين نحصل على :

$$(\sigma^{kl} - \sigma^{ki} a_k^{-i} a_i^{-j}) e_i e_j = 0 \quad (1.45)$$

و هذا يؤدي إلى علاقة تحويل الإجهادات التالية :

$$\sigma^{kl} = a_k^{-i} \sigma^{ki} a_i^{-j} \quad (1.46)$$

و بشكل مماثل نجد بالنسبة للتحويل العكسي أن :

$$\sigma^{ij} = a_k^{-i} \sigma^{kl} a_l^{-j} \quad (1.47)$$

تربط المعاملات  $a_k^{-i}$  أشعة القاعدة الأساسية للجملتين ببعضهما البعض على شكل العلاقة (1.43) بالشكل :

$$e_k = a_k^{-i} e_i^- \quad \text{أو} \quad e_i = a_i^{-j} e_j^- \quad (1.48)$$

لاكتشاف العلاقة التي تربط بين المعاملات  $a_k^{-i}$  و  $a_i^{-j}$  نعوض العلاقة (1.48) في العلاقة (1.43) فنحصل على :

$$e_k^- = a_k^{-i} a_i^{-j} e_j^- \quad (1.49)$$

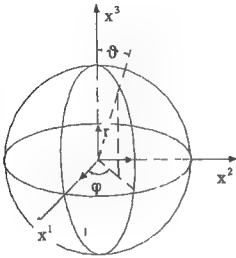
بضرب هذه العلاقة سلمياً بأشعة القاعدة الضدية  $e^-$  و بعد ملاحظة خواص موتر كرونكسر نجد أن :

$$\delta_k^{-i} = a_k^{-i} a_i^{-j} \delta_j^{-i} = a_k^{-i} a_i^{-i} \quad (1.50)$$

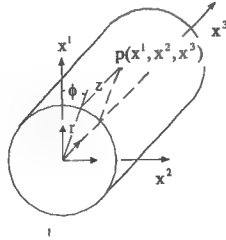
أي أن المعاملات  $a_k^{-i}$  هي معكوس  $a_i^{-j}$  . و كمثال على هذا التحويل يمكن أن ندرس حالة

تحويل موتر الإجهادات من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الأسطوانية والإحداثيات الكروية . ولهذا الغرض يجب تحديد معاملات التحويل  $a_k^{-i}$  . ففي الإحداثيات الأسطوانية (شكل 1-8) يمكن التعبير عن إحداثيات نقطة ما من القشرة الأسطوانية  $P(x^1, x^2, x^3)$

بالإحداثيات الأسطوانية  $P(x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = Z)$ . والعلاقات التي تربط الإحداثيات الديكارتية بالإحداثيات الأسطوانية يمكن استنتاجها من الشكل مباشرة .



شكل 9 : جملة الإحداثيات الكروية



شكل 8 : جملة الإحداثيات الأسطوانية

$$x^1 = r \cos \phi$$

$$x^2 = r \sin \phi$$

$$x^3 = Z$$

و شعاع المكان للنقطة  $p$  يعبر بالعلاقة :

$$\mathbf{R} = r \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \sin \phi \mathbf{e}_2 + Z \mathbf{e}_3$$

فإذا اعتبرنا أن الأشعة القاعدية الأساسية للحزمة الأسطوانية فسوف نرى في الفصول اللاحقة أنه يمكن الحصول عليها باشتقاق العلاقة السابقة جزئياً بالنسبة للإحداثيات الأسطوانية بالشكل :

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = -r \sin \phi \mathbf{e}_1 + r \cos \phi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} = \mathbf{e}_3$$

و المصفوفة

$$a_k^i = \begin{pmatrix} \cos & \sin & 0 \\ -r \sin & r \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمثل معاملات التحويل المطلوبة . و ما علينا لكي نحول مركبات الإجهادات من الإحداثيات

الديكارتية إلى الإحداثيات الأسطوانية سوى إنجاز الجداء المثلث بالعلاقة (1.47).

أما بالنسبة للإحداثيات الكروية فنقطة ما من سطح الكرة (شكل 1-9) يمكن التعبير عنها في

الإحداثيات الكروية ( $\bar{x}^1 = r; \bar{x}^2 = \varphi; \bar{x}^3 = \vartheta$ ) بدلا من الإحداثيات الديكارتية . و

العلاقات التي تربط الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الكروية هي :

$$x^1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$x^2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$x^3 = r \cos \vartheta$$

و شعاع المكان للنقطة p هو

$$\mathbf{R} = r \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 + r \cos \vartheta \mathbf{e}_3$$

و باعتبار أن  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\vartheta$  أشعة القاعدة الأساسية للجملة الكروية نجد أن :

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = -r \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_1 + r \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{e}_2 - r \sin \vartheta \mathbf{e}_3$$

و معاملات التحويل المطلوبة ممثلة بالمصفوفة التالية :

$$a_k^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

#### 1-4- الإجهادات الرئيسية والمستويات الرئيسية

في كثير من الأحيان يهتما البحث عن القيم الحدية (الأعظمية و الأصغرية) للإجهادات الناعمية و الإجهادات المماسية الوارد حسابها في العلاقات (1.41) و (1.42) وذلك لأهميتها التصميمية . و باعتبار أن المحصلة الكلية للإجهادات الواردة في تلك العلاقات هي المحصلة الهندسية للإجهادات الناعمية  $t_n$  و الإجهادات المماسية  $t_s$  في المقطع الذي ناظمه الشعاع  $n$  ، بالتالي تكون قيم الإجهادات الناعمية أعظم ما يمكن في المقاطع التي تكون فيها قيم الإجهادات المماسية معدومة . تسمى الإجهادات الأعظمية هذه بالإجهادات الرئيسية والمستويات التي تقع فيها بالمستويات الرئيسية فإذا فرضنا أن المقطع للتخذ (الشكل 1-7) و الذي ناظمه  $n$  مستويا رئيسيا فيجب أن يكون هذا المستوي خاليا من الإجهادات المماسية و عليه يجب أن تتطابق محصلة الإجهادات الكلية  $t$  مع إتجاه الناظم  $n$  و يمكن التعبير عن  $t$  بدلالة  $n$  بعلاقة الارتباط الخطية :

$$t = \lambda n \quad (1.51)$$

حيث  $\lambda$  طولية الشعاع  $t$  . بنقل الطرف الثاني من العلاقة السابقة إلى الطرف الأول و تعويض العلاقاتين (1.30) و (1.51) فيها نحصل على

$$\sigma_{ij}^n e_i - \lambda n^i e_i = 0 \quad (1.52)$$

وبعد ضرب هذه العلاقة سلميا بالأشعة  $e^k$  نحصل بعد ملاحظة أن :

$$n = n^i e_i = n_i e^i; \quad n^i \delta_i^k = n_i \delta^{ik} \quad (1.53)$$

$$n^k = n_i \delta^{ik}; \quad n^k = n_j \delta^{jk}$$

على :

$$(\sigma^{kj} - \lambda \delta^{kj}) n_j = 0 \quad (1.54)$$

تملك جملة للمعادلات المتجانسة هذه حلا مغايرا للصفر فقط و فقط إذا كان معين مصفوفة أمثالها مكافئا للصفر .

$$\det(\sigma^{KJ} - \lambda \delta^{KJ}) = \begin{vmatrix} \sigma^{11} - \lambda & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} - \lambda & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.55)$$

بعد فك المعين نحصل على المعادلة المميزة:

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (1.56)$$

حيث :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33} = \sigma^{JJ} \\ I_2 &= \sigma^{11}\sigma^{22} + \sigma^{22}\sigma^{33} + \sigma^{33}\sigma^{11} - ((\sigma^{12})^2 + (\sigma^{13})^2 + (\sigma^{23})^2) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^{JJ}\sigma^{JJ} - \sigma^{JJ}\sigma^{JJ}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$I_3 = \det[\sigma] = |\sigma^{JJ}| = \begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{vmatrix}.$$

تصنف المقادير  $I_1, I_2, I_3$  بثبات قيمها عند التحويل من جملة إحداثيات إلى أخرى . بفضل تناظر متوترة الإجهادات  $\sigma^{JJ}$  يمكن البرهان أن للمعادلة المميزة دوما جلتورا حقيقية . و الجلتور الثلاثة للمعادلة التكميلية هذه تمثل الإجهادات الرئيسية المطلوبة و هي كما هو معروف رياضيا القيم الذاتية لمصفوفة متوترة الإجهادات . يقابل كل قيمة  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  من قيم جلتور المعادلة التكميلية مستوي رئيسي . و يتحدد هذا المستوي بناظمه الذي يمكن حساب نسب مركباته الثلاثة  $n_1(\lambda), n_2(\lambda), n_3(\lambda)$  من المعادلات المتجانسة (1.54) و من ثم الاستعانة بالعلاقة :

$$(n_1(\lambda_1))^2 + (n_2(\lambda))^2 + (n_3(\lambda))^2 = 1 \quad (1.58)$$

تسمى النواظم هذه بالأشعة الذاتية لمصفوفة متوترة الإجهادات و هذه الأشعة تنتمي إلى ساحة الأعداد الحقيقية و متعامدة مع بعضها البعض و يوضح البرهان التالي خاصية تعامد هذه الأشعة . يفرض أن :

$$\begin{aligned} n(\lambda_1) &= n^i(\lambda_1)e_i \\ n(\lambda_2) &= n^i(\lambda_2)e_i \end{aligned} \quad (1.59)$$



هي الأشعة الذاتية الموافقة للقيم الذاتية  $\lambda_1, \lambda_2$  نجد بملاحظة العلاقة (1.52) أن :

$$\begin{aligned}\sigma^j n_j(\lambda_1) &= \lambda_1 n^i(\lambda_1) \\ \sigma^j n_j(\lambda_2) &= \lambda_2 n^i(\lambda_2)\end{aligned}\quad (1.60)$$

الجداء السلمي للشعاعين  $n(\lambda_1), n(\lambda_2)$  هو بعد ملاحظة العلاقة (1.59) و المعادلة الثانية مسن العلاقة (1.60) :

$$n(\lambda_1).n(\lambda_2) = n^i(\lambda_1).n^k(\lambda_2)\delta_{ik} = n^i(\lambda_1).\frac{1}{\lambda_2}\sigma^k n_k(\lambda_2)\delta_{ik} \quad (1.61)$$

بمساعدة المعادلة الأولى من العلاقة (1.60) نجد أن :

$$\sigma^k n^i(\lambda_1)\delta_{ik} = \sigma^k n_k(\lambda_1) = \lambda_1 n^i(\lambda_1) \quad (1.62)$$

و بالعودة إلى العلاقة (1.60) يكون :

$$n(\lambda_1).n(\lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} n^i(\lambda_1).n_i(\lambda_2) \quad (1.63)$$

و القرينة  $\lambda_1/\lambda_2$  يتم عليها الجمع . الطرف الثاني من المعادلة السابقة ما هو إلا الجداء السلمي للشعاعين  $n(\lambda_1), n(\lambda_2)$  مضروباً بالنسبة  $\lambda_1/\lambda_2$  . و في حال اختلاف القيم الذاتية  $\lambda_1, \lambda_2$  لا يمكن أن تكون هذه المعادلة صحيحة إلا إذا كان :

$$n(\lambda_1).n(\lambda_2) = 0 \quad (1.64)$$

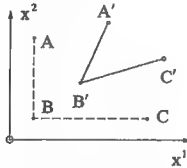
و بالتالي فالأشعة الذاتية متعامدة مع بعضها البعض . يمكن أن نجد أيضاً أنّ المستويات التي تحوي الإجهادات المماسية الحدية تنصّف الزاوية القائمة بين المستويات الرئيسية المحددة سابقاً و هي في العادة غير عمودية من الإجهادات الناعمية و قيمة هذه الإجهادات تحددها العلاقات التالية :

$$\tau_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2}; \tau_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} = \tau_{\max}; \tau_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \quad ; (\lambda_1)(\lambda_2)(\lambda_3) \quad (1.65)$$

## 1-5- مؤثرة التشوهات :

يتشوه الجسم المعرض للمؤثرات الخارجية كالحمولات و تغيرات درجات الحرارة و هيوط نقاط الاستناد . و كقيم مميزة لتحديد تشوه جسم ما أدخل مفهوم التشوهات . و قسمت التشوهات

إلى تشوهات ناظمية (طولية) و تشوهات (عرضية) . يفهم من التشوه الناظمي (الطولي) التفسير الطولي لليف ما من المادة منسوب إلى طوله الأصلي . و يفهم من التشوه المماسي أو العرضي (تشوه القص) بأنه التغير الحاصل في الزاوية التي يصنعها ليفان متعامدان من المادة . لنفرض في البدء أنه لدينا ليفان من الوسط الخاضع للمؤثرات الخارجية ععدان بالنقاط  $A, B, C$  الواقعة في المستوي الديكارتي  $x^1 x^2$  قبل تطبيق المؤثرات الخارجية و قد انتقلت هذه النقاط إلى الوضعية  $A', B', C'$  بعد تطبيق المؤثرات الخارجية (شكل 1-10)



شكل 1-10 : ألياف من الجسم الخاضع للتشوه

نسمي المقادير :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\overline{(A'B')_{x^1}} - \overline{AB}}{\overline{AB}} \quad (1.66)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\overline{(A'C')_{x^2}} - \overline{AC}}{\overline{AC}}$$

بالتشوه الناظمي في الاتجاهين  $x^1$  و  $x^2$  على التوالي ، حيث  $(A'B')_{x^1}, (A'C')_{x^2}$  هي مساقط  $A'B', A'C'$  على المحورين  $x^1, x^2$  . و يسمى المقدار :

$$2\varepsilon_{12} = \angle BAC - \angle B'A'C' \quad (1.67)$$

بالتشوه المماسي في المستوي  $x^1 x^2$  حيث  $\angle$  تشير إلى مقدار الزاوية .

و بالمثل سوف نجد أن هناك تشوّهاً ناظماً باتجاه المحور  $x^3$  و هو  $\varepsilon_{33}$  و تشوّهات مماسية في المستويين  $x^2x^3$  و  $x^3x^1$  و هي التشوّهات  $\varepsilon_{23}$  و  $\varepsilon_{31}$  . و تعرف عادة التشوّهات المماسية  $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$  و  $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}$  و  $\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}$  . و ترتب التشوّهات السابقة في مصفوفة ما يسمى بمؤثر التشوّهات بالشكل التالي :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}; i, j = 1, 2, 3 \quad (1.68)$$

تحدد وضعية الجسم المعرض للمؤثرات الخارجية بعد التشوّه بتعيين انتقالات كل نقطة من الجسم و يلزم لذلك تحديد مركبات انتقال كل نقطة من الجسم . فمثلاً وضعية الانتقال الجديدة للنقطة  $A$  و هي  $A'$  تتحدد بتعيين الشعاع:

$$\begin{aligned} u &= AA' = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3 = u_1 e^1 + u_2 e^2 + u_3 e^3 \\ &= u^i e_i = u_i e^i; i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.69)$$

حيث  $u^1, u^2, u^3$  و  $u_1, u_2, u_3$  هي مركبات شعاع الانتقال الضدية و الأساسية على التوالي المنسوبة إلى جملة أشعة القاعدة الأساسية و الضدية و سوف نرى في الفصل القادم أن العلاقة التي تربط التشوّهات السابقة بالانتقالات و التي تسمى عادة علاقة التشوّهات - الانتقالات هي من الشكل:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u^m_{,j}) \quad (1.70)$$

و ذلك عندما تكون التشوّهات أصغر بكثير من الواحد ( $\varepsilon \ll 1$ ) .

## 1-6- تحويل مؤثر التشوّهات

نفرض أن مؤثر التشوّهات  $\varepsilon_{ij}$  منسوب إلى جملة محاور إحداثية ديكارتية  $(x^1, x^2, x^3)$  بأشعتها الواحدية  $(e_1, e_2, e_3)$  (جملة أساسية) أو تلك للتطبيق معها  $(x_1, x_2, x_3)$  بأشعتها الواحدية  $(e^1, e^2, e^3)$  ، و يراد تحويلها إلى جملة محاور إحداثية  $(x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}})$  أشعتها

الأساسية  $(e_1, e_2, e_3)$  ترتبط معها جملة إحداثية أخرى  $(x_1, x_2, x_3)$  أشعتها الضدية  $(e^1, e^2, e^3)$  و لنفرض أن هذه الأشعة ترتبط مع بعضها البعض بالعلاقات التالية :

$$\begin{aligned} e_i &= a_i^{\bar{k}} e_{\bar{k}}; e^i = a_{\bar{k}}^i e^{\bar{k}} \\ e_i &= a_i^k e_k; e^i = a_k^i e^k \end{aligned} \quad (1.71)$$

حيث  $a_{\bar{k}}^i, a_i^{\bar{k}}$  و  $a_k^i, a_i^k$  معاملات مصفوفات التحويل . باعتبار أن الجداءات السلمية  $(e_i, e^i)$  و  $(e_{\bar{i}}, e^{\bar{i}})$  مساوية لمؤثرة كرونيكر يمكن ببساطة الاستنتاج أن  $a_{\bar{k}}^i$  هي المصفوفة المعاكسة للمصفوفة  $a_i^{\bar{k}}$  هي المصفوفة المعاكسة للمصفوفة  $a_k^i$  . في البدء سنعتبر عن الإحداثيات  $x^{\bar{i}}$  بدلالة مثلتها  $x^i$  ، فشعاع المكان لنقطة ما في الفراغ يمكن التعبير عنه بالشكل :

$$r = x^{\bar{i}} e_{\bar{i}} = x^i e_i \quad (1.72)$$

بتعويض المعادلة الأولى من العلاقة (1.71) في العلاقة السابقة نجد أن :

$$x^{\bar{i}} e_{\bar{i}} = x^i a_i^{\bar{k}} e_{\bar{k}} \quad (1.73)$$

بضرب هذه العلاقة سلمياً بالأشعة  $e^{\bar{j}}$  و ملاحظة العلاقتين (1.4) و (1.12) يكون :

$$x^{\bar{j}} = x^i a_i^{\bar{j}} \quad (1.74)$$

و باستعمال نفس الأسلوب يمكن برهان العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} x_{\bar{j}} &= x_i a_j^{\bar{i}} \\ x_j &= x_{\bar{i}} a_j^{\bar{i}} \\ x^j &= x^{\bar{i}} a_i^j \end{aligned} \quad (1.75)$$

و بالنسبة لتحويل الانتقالات يمكن أيضاً برهان العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} u^{\bar{i}} &= u^i a_i^{\bar{j}} \\ u_{\bar{j}} &= u_i a_j^{\bar{i}} \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$u^{\bar{i}} = u^i a_i^{\bar{j}}$$

$$u_{\bar{j}} = u_i a_j^{\bar{i}}$$

لنعرف الآن مؤثرة التشوهات في الجملة الإحداثية  $x^{\bar{i}}$  على غرار مثلتها في الجملة  $x^i$  بالشكل :

$$\varepsilon_{\bar{k}i} = \frac{1}{2}(u_{\bar{k}j} + u_{i\bar{k}} + u_{\bar{k},m} \bar{u}^m_i) \quad (1.77)$$

و لنحسب المقدار  $a_i^{\bar{k}} \varepsilon_{\bar{k}i} a_j^i$  فنجد بعد ضرب الطرف الثاني من العلاقة السابقة بالمقادير  $a_j^i$  ;  $a_i^{\bar{k}}$  أن:

$$a_i^{\bar{k}} \varepsilon_{\bar{k}i} a_j^i = \frac{1}{2}(a_i^{\bar{k}} u_{\bar{k}j} a_j^i + a_j^i u_{i\bar{k}} a_i^{\bar{k}} + a_i^{\bar{k}} u_{\bar{k},m} \bar{u}^m_j a_j^i) \quad (1.78)$$

باستخدام علاقات التحويل (1.76) و مشتق تابع التابع نستنتج بعد إيجاد مشتقات العلاقات (1.74) . (1.75) أن :

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x^j} = a_i^{\bar{k}} \frac{\partial u_{\bar{k}}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = a_i^{\bar{k}} u_{\bar{k}j} a_j^i \\ u_{j,i} &= \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = a_j^{\bar{i}} \frac{\partial u_{\bar{i}}}{\partial x^{\bar{k}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^i} = a_j^{\bar{i}} u_{\bar{i}\bar{k}} a_i^{\bar{k}} \\ u_{m,j} &= \frac{\partial u_m}{\partial x^j} = a_m^{\bar{m}} \frac{\partial u_{\bar{m}}}{\partial x^{\bar{k}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^j} = a_m^{\bar{m}} u_{\bar{m},\bar{k}} a_j^{\bar{k}} \\ u^m_{,j} &= \frac{\partial u^m}{\partial x^j} = a^{\bar{m}}_m \frac{\partial u^{\bar{m}}}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^j} = a^{\bar{m}}_m u^{\bar{m}}_{,\bar{i}} a_j^{\bar{i}} \end{aligned} \quad (1.79)$$

و الجداء  $u_{m,i} u^m_{,j}$  يمكن تحويله بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} u_{m,i} u^m_{,j} &= a_m^{\bar{m}} u_{\bar{m},\bar{k}} a_i^{\bar{k}} a^{\bar{m}}_m u^{\bar{m}}_{,\bar{i}} a_j^{\bar{i}} \\ &= a_i^{\bar{k}} u_{\bar{m},\bar{k}} a_i^{\bar{k}} \delta^{\bar{m}}_{\bar{i}} u^{\bar{m}}_{,\bar{i}} a_j^{\bar{i}} \\ &= a_i^{\bar{k}} u_{\bar{m},\bar{k}} u^{\bar{m}}_{,\bar{i}} a_j^{\bar{i}} \end{aligned} \quad (1.80)$$

باعتبار المساواة  $(a_i^{\bar{k}} u_{\bar{k},m} = a_i^{\bar{k}} u_{m,\bar{k}})$  وذلك لتماثل  $u_{\bar{k},m}$  و  $u_{m,\bar{k}}$  تصبح مؤثرة التشوهات للمعرفة بالعلاقة (1.70) كالآتي :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(a_i^{\bar{k}} u_{\bar{k}j} a_j^i + a_j^i u_{i\bar{k}} a_i^{\bar{k}} + a_i^{\bar{k}} u_{\bar{k},m} \bar{u}^m_j a_j^i) \quad (1.81)$$

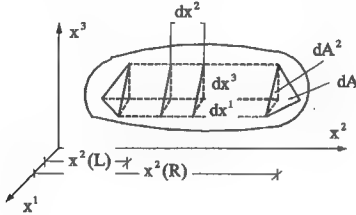
و بالمقارنة بين العلاقتين (1.78) و (1.81) نحصل على دستور تحويل التشوهات التالي :

$$\varepsilon_{ij} = a_i^{\bar{k}} \varepsilon_{\bar{k}i} a_j^i \quad (1.82)$$

وهو مشابه للمستور تحويل موثقة الإجهادات .

### 7-1- تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي (مقولة غاوس Gauss)

لنعتبر موشوراً تفاضلياً من جسم ما حروفه موازية للمحور  $x^2$  و مساحة مقطعه الذي ناظمه المحور  $x^2$  هي  $dA^2$  و لنفرض أن الموشور ممتد من الطرفين بحيث يتقاطع مع سطح الجسم (شكل 1-11). أي أمكن تقاطع الموشور مع الجسم تنشأ مساحة  $dA$  تتمثل بمثلث رؤوسه هي نقاط تقاطع أضلاع الموشور مع الجسم . يشكل مستوي المساحة  $dA$  والمستويات المارة بأضلاع هذا المثلث و الموازية للمستويات الإحداثية  $x^1x^2, x^2x^3, x^1x^3$  هراً رسم مكبراً كما



شكل 1-11 : موشور تفاضلي مقطوع من الجسم ممتد باتجاه  $x^2$

(ب الشكل 6-1) . لنفرض أن حقلاً شعاعياً من الشكل:

$$\mathbf{u} = u(x^1, x^2, x^3, t) = u^1(x^1, x^2, x^3, t)\mathbf{e}_1 + u^2(x^1, x^2, x^3, t)\mathbf{e}_2 + u^3(x^1, x^2, x^3, t)\mathbf{e}_3 = u^i\mathbf{e}_i \quad (1.83)$$

معرفاً ضمن فراغ الجسم . يسمى المقدار:

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} = u^i{}_{,i} \quad (1.84)$$

بـتفرق الحقل الشعاعي  $\mathbf{u}$  و التكامل :

$$\int_V \text{div } \mathbf{u} dV = \int_V \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \right) dV = \int_V u^i_{,i} dV \quad (1.85)$$

بالتكامل على تفرق حقل شعاعي . لنعتبر الآن جزء التكامل المتعلق بـ  $u^{x^2}$  فهو يساوي:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial u^{x^2}}{\partial x^2} dV &= \int_{A^2} \int_{x^2=x^2(1)}^{x^2=x^2(r)} \left( \frac{\partial u^{x^2}}{\partial x^2} dx^2 \right) dA^2 = \int_{A^2} u^{x^2}(x^2(r)) - u^{x^2}(x^2(1)) dA^2 \\ &= \int_{A^2} \left\{ \left[ u^{x^2}(x^2 = x^2(r)) e_2 \right] \left[ dA^2 e_2 \right] + \left[ u^{x^2}(x^2 = x^2(1)) e_2 \right] \left[ -dA^2 e_2 \right] \right\} \\ &= \int_A u^{x^2} e_2 (n^2 e_2) dA \end{aligned} \quad (1.86)$$

و ذلك بعد ملاحظة العلاقة (1.29) . و بالمثل نجد باعتبار الجزأين الآخرين للتكامل أن :

$$\int_V \frac{\partial u^{x^1}}{\partial x^1} dV = \int_A u^{x^1} e_1 (n^1 e_1) dA \quad (1.87)$$

$$\int_V \frac{\partial u^{x^3}}{\partial x^3} dV = \int_A u^{x^3} e_3 (n^3 e_3) dA$$

و يصبح التكامل الحجمي مكافئاً للتالي:

$$\begin{aligned} \int_V \text{div } \mathbf{u} dV &= \int_A \left[ u^{x^1} e_1 (n^1 e_1) + u^{x^2} e_2 (n^2 e_2) + u^{x^3} e_3 (n^3 e_3) \right] dA \\ &= \int_A (u^{x^1} e_1 + u^{x^2} e_2 + u^{x^3} e_3) (n^1 e_1 + n^2 e_2 + n^3 e_3) dA \\ &= \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned} \quad (1.88)$$

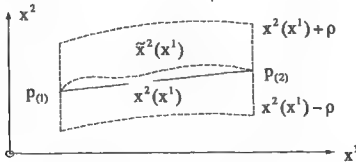
وهي العلاقة الرياضية المعبرة عن مقولة غاوس في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي .

## 1-8-1 مقدمة في حساب المتغيرات

### 1-8-1 وصف عام لمسائل حساب المتغيرات .

تندرج مسائل حساب المتغيرات ضمن مسائل حساب القيم الحدية ، و لكن بشكل أعم مما هو عليه في طرح مسائل القيم الحدية لتابع بمتغير واحد أو بعدة متغيرات . إذ يتعلق الأمر كما نعلم في مسائل إيجاد القيم الحدية لتابع ما بإيجاد النقاط التي يكون فيها للتابع الحقيقي قيم عظمى أو قيم صغرى في مجال ما من مجالات تعريفه . أما في مسائل حساب المتغيرات فيتعلق الأمر بإيجاد منحنى أو سطح أو حجم ما تأخذ من أجله قيمة ما مرتبطة بهذا المنحنى أو السطح أو الحجم قيمة حدية . و لإيضاح هذه المسألة سيستم شرحها على مسائل مبسطة . فمثلاً بين نقطتين  $p_{(1)}(x^1, x^2)$  ،  $p_{(2)}(x^1, x^2)$  من المستوي يمكن أن نمرّر عدداً لا نهائياً من المنحنيات المستمرة التي تمر بهاتين النقطتين . لنفرض أننا خصصنا لكل منحنى من هذه المنحنيات قيمة ما متعلقة به و لتكن في مثالنا هنا طول المنحنى . و لنسمي هذه القيمة بالقيمة التابعة و التي يمكن حسابها كما نعلم بالشكل:

$$I = \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)^2} dx^1 \quad (1.89)$$



شكل 1-12: توابع للمقارنة ضمن المجال  $x^1(1) \leq x^1 \leq x^1(2)$



إذا هناك عدد لا نهائي من القيم  $I$  مقابلة لعدد المنحنيات المارة بين النقطتين  $P_{(1)}$  و  $P_{(2)}$  والقيم  $I$  تشكل بدورها تابعا للمنحنيات المفروضة و سنطلق على هذا التابع لتمييزه عن التوابع العادية (تابعي) كمرادف لكلمة (Functional). و مسألة حساب المتغيرات التي يمكن طرحها الآن هي إيجاد المنحني  $(x^1)$  الذي يقابل القيمة الصغرى للتابعي  $I$  أو بمعنى هندسي إيجاد أقصر منحني يربط بين النقطتين  $P_{(1)}$  و  $P_{(2)}$ .

قد يأخذ التابعي أشكالا أخرى و ليس من الضروري أن يكون الطول . فلو افترضنا أن  $p_{(1)}$  و  $p_{(2)}$  غير واقعيتين في مستوي أفقي واحد و ليس على شاقول واحد و أن  $p_{(1)}$  أعلى من  $p_{(2)}$  ، فمثلا إذا طلب إيجاد المنحني الواصل بين  $p_{(1)}$  و  $p_{(2)}$  ، و الذي إذا ما تدحرجت عليه كرة مادية تحت تأثير وزنها الذاتي وصلت الكرة من  $p_{(1)}$  إلى  $p_{(2)}$  بأقصر زمن ممكن ، في هذه الحالة يتمثل التابعي بالزمن اللازم للوصول من  $p_{(1)}$  إلى  $p_{(2)}$  و الشروط الطرفية للمسألة تتمثل بكون المنحني الذي يتم البحث عنه مارا بالنقطتين  $p_{(1)}$  ،  $p_{(2)}$  . كما أنه ليس من الضروري أيضا أن يكون التابعي تكاملا على الطول و قد يأخذ أشكالا أخرى للتكامل . كالتكامل على السطح مثلا ، و المثال التالي يوضح ذلك . لنفرض أنه لدينا منحنى فراغي مغلق طوله  $l$  نود تشكيله ليحيط بأصغر مساحة ممكنة . لنفرض أن  $\lambda$  مسقط المنحني الفراغي  $l$  على المستوي  $x^1 x^2$  و أن  $B$  المساحة التي يحيط بها هذا المسقط . و لنفرض أن المساحة المغلفة من  $l$  يمكن التعبير عن معادلتها بالشكل  $x^3 = f(x^1, x^2)$  عندها يتمثل التابعي و لرمز له الآن ب  $S$  بدلا من  $I$  في المثال السابق بمساحة السطح  $x^3 = f(x^1, x^2)$  و التي يمكن حسابها بالشكل:

$$S = \iint_{\lambda} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2} dx^1 dx^2 \quad (1.90)$$

من أجل مساحة ما  $B$  تأخذ  $S$  قيمة محددة ، لذلك يمكن القول أن  $S$  تابعي للمساحة  $B$  والمسألة المطروحة تعني إيجاد السطح  $f(x^1, x^2)$  و الذي تأخذ من أجله  $S$  قيمتها الصغرى و الشروط الطرفية للمسألة تتلخص في البحث عن السطح الأصغري لنقاط محددة من  $\lambda$  حيث يجب أن تحسب ترتيب هذه النقاط  $x^3$  من شرط وقوعها على المنحني  $l$  و الذي يحصر المساحة التي يتم البحث عنها . و قبل الاستمرار في معالجة المسألة سوف نوضح لماذا أدرجت مسائل حساب المتغيرات ضمن مسائل حساب القيم الحدية . من المعلوم أن مسألة حساب القيم الحدية لتابع ما

$f(x^1)$  تحول عادة إلى بحث عن حلول للمعادلة التفاضلية  $f'(x^1) = 0$  حيث تمثل المعادلة التفاضلية الشرط اللازم لوجود مثل هذه النهاية الحدية . و بالتالي تحقق القيم  $x^1$  التي يأخذ من أجلها التابع  $f(x^1)$  قيمة حدية للمعادلة التفاضلية  $f'(x^1) = 0$  . و كذلك الأمر بالنسبة لمساائل حساب المتغيرات سوف نجد أن المنحنيات  $f(x^1)$  أو السطوح  $f(x^1, x^2)$  التي يأخذ من أجلها التابع  $I$  أو  $S$  قيمة حدية يجب أن تحقق معادلة تفاضلية تسمى بمعادلة أويلر التفاضلية . و للبحث عن توابع القيم الحدية للتابع يسمح عادة بتوابع مقارنة فمثلا لإيجاد المنحني الأقصر  $x^2(x^1)$  الذي يصل بين النقطتين  $p_{(1)}, p_{(2)}$  شكل (1-12) يسمح بتوابع مقارنة  $\tilde{x}^2(x^1)$  يجب أن تكون كلها مارة من النقطتين السابقتين . فإذا ما حصرنا توابع المقارنة بالمجموعة  $\rho \left| \tilde{x}^2(x^1) - x^2(x^1) \right|$  من أجل  $x^1_{(1)} \leq x^1 \leq x^1_{(2)}$  فهذا يعني أننا أخذنا بعين الاعتبار توابع المقارنة  $\tilde{x}^2(x^1)$  الواقعة في جوار التابع للمثل للحالة الحدية ، و الذي يتم البحث عنه ، و ذلك عندما تكون  $\rho$  صغيرة. و في هذه الحالة نستطيع القول أن التابع  $x^2(x^1)$  يمثل حالة حدية نسبية .

### 1-8-2 - تعريف المتغير

نفرض أن قيمة التابع من أجل المنحني  $x^2(x^1)$  الممثل للنهاية الحدية هي  $I$  و أن قيمة التابع من أجل منحني مقارنة  $\tilde{x}^2(x^1)$  هي  $\tilde{I}$  فإذا غُيِّرَت  $x^2(x^1)$  بالمقدار  $\Delta x^2(x^1) = \tilde{x}^2(x^1) - x^2(x^1)$  فإن تغير التابع الملحق بهذا التغير هو  $\Delta I = \tilde{I} - I$  . لنأخذ الآن تغيرا خاصا للمقلدر  $\Delta x^2(x^1)$  من الشكل :

$$\Delta x^2(x^1) = \tilde{x}^2(x^1) - x^2(x^1) = \varepsilon \eta(x^1) \quad (1.91)$$

حيث  $\eta(x^1)$  تابع عشوائي يحقق فقط شرط الاستمرارية كالمنحني  $x^2(x^1)$  ، و ليس من الضروري أن يكون متناه في الصغر و  $\varepsilon$  معامل متناه في الصغر يحقق الشرط  $\rho \left| \varepsilon \eta(x^1) \right| \leq$  و غير متعلق بالتحول  $x^1$  . نسمي هذا التغير الخاص للتابع  $x^2(x^1)$  بتغير  $x^2(x^1)$  و ذلك

عندما ينتهي  $\varepsilon$  إلى الصفر ونرمز لهذا المتغير بالرمز  $\delta x^2$ ، ويمكن التعبير عنه بالصيغة الرياضية التالية :

$$\delta x^2 = \varepsilon \left( \frac{\partial \tilde{x}^2(x^1)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad (1.92)$$

و ذلك لأنه يمكن ملاحظة العلاقة (1.91) التعبير عن  $\tilde{x}^2(x^1)$  بالشكل :

$$\tilde{x}^2(x^1) = x^2(x^1) + \varepsilon \eta(x^1) \quad (1.93)$$

ومشتق هذا التابع جزئيا بالنسبة للمقدار  $\varepsilon$  هو  $\eta(x^1)$  و عندما نضرب هذا المشتق بالمقدار  $\varepsilon$  نحصل على المتغير  $\Delta x^2(x^1)$  وفي حال سعي  $\varepsilon$  إلى الصفر نحصل على المتغير كما هو وارد في التعريف . قلنا أن للتابعي قيمة ملحقة بمنحني المقارنة  $\tilde{x}^2(x^1)$  وهذه القيمة هي  $\tilde{I}$  أصبحت بعد اعتبار المتغير الخاص لمنحني المقارنة تابعة للمقدار  $\varepsilon$  و تحقق المترابطة والمعادلة التاليين :

$$\tilde{I} = \tilde{I}(\varepsilon) \geq (\varepsilon = 0) = I \quad (1.94)$$

و ذلك لأنه عندما تنتهي  $\varepsilon$  إلى الصفر ينتهي منحني المقارنة  $\tilde{x}^2(x^1)$  إلى المنحني المطلوب  $\tilde{x}^2(x^1)$  وهذا ما يمكن استنتاجه من العلاقة (1.93) و بالتالي تنتهي قيمة  $\tilde{I}(\varepsilon = 0)$  المقابلة للتابع  $\tilde{x}^2(x^1)$  إلى قيمة  $I$  المقابلة للتابع  $x^2(x^1)$  . كما يمكن من العلاقة (1.89) الاستنتاج أن  $\tilde{I}(\varepsilon) \geq I$  بمقارنة الحدين  $\left( \frac{\partial \tilde{x}^2(x^1)}{\partial x^1} \right)^2$ ،  $\left( \frac{\partial x^2(x^1)}{\partial x^1} \right)^2$  . نشر الآن  $\tilde{I}(\varepsilon)$  وفق سلسلة

تايلور بمحاور  $\varepsilon = 0$  فنحصل على:

$$\tilde{I}(\varepsilon) = \tilde{I}(\varepsilon = 0) + \varepsilon \frac{\tilde{I}'(\varepsilon = 0)}{1!} + \varepsilon^2 \frac{\tilde{I}''(\varepsilon = 0)}{2!} + \dots + \varepsilon^n \frac{\tilde{I}^{(n)}(\varepsilon = 0)}{n!} \quad (1.95)$$

حيث  $\tilde{I}'$  تعني المشتق بالنسبة للمقدار  $\varepsilon$  . و بملاحظة العلاقة (1.94) و إدخال تعريف المتغير يُجد أن :

$$\delta I = \varepsilon \tilde{I}'(\varepsilon = 0) = \varepsilon \left( \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad (1.97)$$

يمثل المتغير الأول للتابعي والحد :

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \tilde{I}''(\varepsilon = 0) = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\varepsilon=0} \quad (1.98)$$

متغيره الثاني وأخيرا الحد :

$$\delta^* I = \varepsilon^* \tilde{I}^{(n)}(\varepsilon = 0) = \varepsilon^* \left( \frac{\partial^{(n)} \tilde{I}}{(\partial \varepsilon)^n} \right)_{\varepsilon=0} \quad (1.99)$$

المتغير من الدرجة  $n$  .

### 1-8-3- قابلية تبديل تنالي المتغير الأول و المشتق الأول

ليكن لدينا المنحني  $g(x^2(x^1), x^1)$  المقابل لقيمة حدية لتابعي و منحنيات المقارنة له  $\tilde{g}(\tilde{x}^2(x^1), x^1)$  . هذه المنحنيات تابعة بدورها للمتحويل المستقل  $x^1$  ، و ترتبط مع بعضها البعض بتعريف التغير الخاص لمنحني المقارنة بالشكل:

$$\tilde{g}(\tilde{x}^2(x^1), x^1) = g(x^2(x^1), x^1) + \varepsilon \eta(x^1) \quad (1.100)$$

باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للمقدار  $\varepsilon$  وإلغاء  $\varepsilon$  إلى الصفر ، ومن ثم الاشتقاق بالنسبة للمتحويل المستقل  $x^1$  نحصل على التوالي على :

$$\varepsilon \left( \frac{\partial \tilde{g}(\tilde{x}^2(x^1), x^1)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \delta g = \varepsilon \eta(x^1) \quad (1.101)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \{ \delta g \} = \{ \delta g \}_{,x^1} = \varepsilon \frac{\partial \eta(x^1)}{\partial x^1} \quad (1.102)$$

و باشتقاق العلاقة (1.100) أولاً بالنسبة للمتحويل المستقل  $x^1$  و من ثم بالنسبة للمقدار  $\varepsilon$  و ضرب العلاقة الناتجة بالأخير  $\varepsilon$  وإلغاء  $\varepsilon$  إلى الصفر نحصل أيضاً على التوالي على ما يلي :

$$\frac{\partial \tilde{g}(\tilde{x}^2(x^1), x^1)}{\partial x^1} = \tilde{g}_{,x^1} = \frac{\partial g(x^2(x^1), x^1)}{\partial x^1} + \varepsilon \frac{\partial \eta(x^1)}{\partial x^1} \quad (1.103)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \{ \tilde{g}_{,x^1} \} \right)_{\varepsilon=0} = \delta \{ g_{,x^1} \} = \varepsilon \frac{\partial \eta(x^1)}{\partial x^1} \quad (1.104)$$

مقارنة العلاقتين (1.102) ، (1.104) نجد أن :

$$\{ \delta g \}_{,x^1} = \delta \{ g_{,x^1} \} \quad (1.105)$$

أي أن المتغير الأول و المشتق الأول قابلين للتبديل .

#### 1-8-4- معادلة أولير التفاضلية

ذكرنا بالنسبة لمسائل حساب المتغيرات أنه لكي يأخذ تابعي ما قيمة حدية يجب أن يحقق المنحني المتعلق بهذا التابعي في حالته الحدية معادلة تسمى معادلة أولير التفاضلية ، و سوف نستنتجها الآن لحالة مبسطة يكون فيها التابعي متعلقا بالتابع  $f$  المتعلق بدورته بالإحداثي المستقل  $x^1$  وبالتابع  $x^2(x^1)$  ومشتقه بالنسبة لـ  $x^1$  أي  $(x^2, x^1)$  على الشكل :

$$I = \int_{x^1(0)}^{x^1(2)} f(x^1, x^2(x^1), x^2, x^1(x^1)) dx^1 \quad (1.106)$$

بعد فرض أن توابع المقارنة على غرار تلك الواردة في العلاقة (1.93) و أنها تمر كلها من النقطتين  $p_{(0)}$  و  $p_{(2)}$  ، يكون عند هاتين النقطتين :

$$\tilde{x}^2(x^1(0)) = x^2(x^1(0)); \eta(x^1(0)) = 0 \quad (1.107)$$

$$\tilde{x}^2(x^1(2)) = x^2(x^1(2)); \eta(x^1(2)) = 0$$

وهاتان المعادلتان يمثلان الشروط الطرفية للمسألة. بتوابع المقارنة المذكورة تصبح قيمة التابعي  $\tilde{I}$  :

$$\tilde{I}(\varepsilon) = \int_{x^1(0)}^{x^1(2)} f(x^1, \tilde{x}^2(x^1), \tilde{x}^2, x^1(x^1)) dx^1 \quad (1.108)$$

$$= \int_{x^1(0)}^{x^1(2)} f(x^1, x^2(x^1) + \varepsilon \eta(x^1), x^2, x^1(x^1) + \varepsilon \eta, x^1(x^1)) dx^1$$

لنفرض أن التابع  $f$  مستمر و قابل للاشتقاق في مجال المقارنة للمعتبر . و باعتبار أن التابع  $x^2(x^1)$  مقابل للقيمة الحدية للمتبع  $I$  ، بالتالي يأخذ التابعي أيضاً قيمة حدية من أجل  $\varepsilon = 0$  و هو ما ذكر كمضمون للعلاقة (1.94) . و بناءً عليه يجب أن ينعدم المشتق الأول للتابعي  $\tilde{I}(\varepsilon)$  مسن أجل  $\varepsilon = 0$  و المشتق الأول هو :

$$\begin{aligned}
I'(\varepsilon) &= \int_{x^{(2)}}^{x^{(2)}} (f_{,x^2} \tilde{x}^2 + f_{,x^2,x^1} \tilde{x}^2, x^1) dx^1 \\
&= \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} (f_{,x^2} \eta(x^1) + f_{,x^2,x^1} \eta_{,x^1}(x^1)) dx^1 \quad (1.109)
\end{aligned}$$

و ذلك بعد استعمال مشتق تابع التابع . الفتحة تعني الاشتقاق بالنسبة للمقدار  $\varepsilon$  . و عليه ينعدم هذا المشتق عندما تسمى  $\varepsilon$  إلى الصفر .

$$\delta I = \varepsilon \tilde{I}_{(مس)} = \varepsilon \left\{ \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f_{,x^2} \eta(x^1) + f_{,x^2,x^1} \eta_{,x^1}(x^1) dx^1 \right\} = 0 \quad (1.110)$$

نلاحظ أننا انتقلنا من توابع المقارنة المميزة بالإشارة " إلى التوابع التي نبحث عنها و ذلك لتطابقها من أجل  $\varepsilon = 0$  . نكامل الحد الثاني من الطرف الثاني بالتجزئة فنحصل على :

$$\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f_{,x^2,x^1} \eta_{,x^1}(x^1) dx^1 = f_{,x^2,x^1} \eta(x^1) \Big|_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} - \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} [f_{,x^2,x^1}]_{,x^1} dx^1 \quad (1.111)$$

بالتعويض في العلاقة (1.110) و إخراج التابع العشوائي  $\eta(x^1)$  خارج قوسين ينتج :

$$\delta I = \varepsilon \left\{ f_{,x^2,x^1} \eta(x^1) \Big|_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} + \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \eta(x^1) [f_{,x^2} - [f_{,x^2,x^1}]_{,x^1}] dx^1 \right\} = 0 \quad (1.112)$$

باعتبار أن الشروط الطرفية (1.107) عميقة و أن  $\eta(x^1)$  تابع عشوائي ، فحقق ينعدم التركيب السابق يجب أن يكون :

$$f_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} f_{,x^2,x^1} = 0 \quad (1.113)$$

و هي معادلة أولير التفاضلية الموافقة لشرط انعدام المتغير الأول للتابعي  $I$  .

يجب عدم الالتباس في تفسير التعبير  $f_{,x^2,x^1}$  فهو لا يعني الاشتقاق أولاً بالنسبة للمتحول  $x^2$  و ثم بالنسبة للمتحول  $x^1$  كما يمكن التصور للوهلة الأولى وإنما يعني المشتق الجزئي للتابع  $f$  بالنسبة لمشتق التابع  $x^2$  . و لكي نكتب المعادلة التفاضلية بشكل تفصيلي لا بد من كتابة

التفاضل الكلي للتابع  $g = f_{(x^2, x^1)} = \frac{\partial f}{\partial x^2, x^1}$  وذلك باعتباره تابعاً للمقادير  $x^2, x^1$  ،  
:  $x^2, x^1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^1} g &= \left( \frac{\partial g}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial g}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial g}{\partial x^2, x^1} dx^2, x^1 \right) / dx^1 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2, x^1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2, x^1 \partial x^2} x^2, x^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2, x^1 \partial x^2, x^1} x^2, x^1 x^1 \end{aligned} \quad (1.114)$$

وتصبح معادلة أولير التفاضلية بشكلها التفصيلي لهذه الحالة كالتالي:

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2, x^1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2, x^1 \partial x^2} x^2, x^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2, x^1 \partial x^2, x^1} x^2, x^1 x^1 = 0 \quad (1.115)$$

وهي تمثل الشرط اللازم لكي يأخذ التابع  $I$  قيمة حدية . و بالتالي للبحث عن المنحنيات التي تعطي تابعي ما قيمة حدية يجب البحث عن حلول معادلة أولير التفاضلية والتي تحقق الشروط الطرفية المطلوبة . و كمثال على ذلك نعود إلى المسألة المطروحة في الفقرة (1-8-1) و المتعلقة بالبحث عن أقصر منحنى يربط نقطتين مفروضتين . يتمثل التابع  $f$  أو تابع أولير التابع الموحود بعد إشارة التكامل في العلاقة (1.89) أي :

$$f = [1 + (x^2, x^1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

هذا التابع لا يحوي  $x^1$  بشكل صريح كما لا يحوي  $x^2$  و بالتالي فمشتقه بالنسبة للتابع  $x^2$  مساو للصفر

$$f, x^2 = 0$$

نحسب الآن مشتقه  $\frac{d}{dx^1} f_{(x^2, x^1)}$  . لهذا الغرض نشق الآن جزئياً بالنسبة لمشتق التابع  $x^2$

$$f_{(x^2, x^1)} = \frac{1}{2} [1 + (x^2, x^1)^2]^{\frac{1}{2}} \cdot 2x^2, x^1 = x^2, x^1 / [1 + (x^2, x^1)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{v}$$

و مشتقه الكلي بالنسبة للمتحول  $x^1$  يحسب بالشكل :

$$\frac{d}{dx^1} f_{(x^2, x^1)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{1}{1 + (x^2, x^1)^2} \left\{ x^2, x^1 \left[ 1 + (x^2, x^1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{(x^2, x^1)^2 \cdot x^2, x^1}{\left[ 1 + (x^2, x^1)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$= (x^2, x^1) / \left[ 1 + (x^2, x^1)^2 \right]^{3/2}$$

و بالتالي ينتج من تطبيق معادلة اويلر التفاضلية على هذه للسألة العلاقة التالية :

$$f_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} f_{,x^1} = x^2, x^1 / \left[ 1 + (x^2, x^1)^2 \right]^{3/2} = 0$$

و هذه العلاقة معروفة بأنها تعطي مقلوب نصف قطر الانحناء لمنحني  $(\frac{1}{\rho} = 0)$  أي أن  $(\rho \rightarrow \infty)$  و المنحني الذي نصف قطر انحناءه لا نهائي هو الخط المستقيم . إلا أنه يمكن استنتاج ذلك من العلاقة السابقة . باعتبار أن المخرج موجب دوماً و أكبر من الصفر فحتى يتعلم الكسور السابق لا بد من أن تساوي صورته الصفر أي :

$$x^2, x^1 = \frac{d^2 x^2}{(dx^1)^2} = 0$$

و بمكاملة هذه المعادلة مرتين نحصل على معادلة المنحني المطلوب

$$x^2 = c_0 + c_1 x^1$$

و هي معادلة خط مستقيم تحدد ثوابته  $c_0, c_1$  من شروط مروره في النقطتين  $P_{(1)}$  و  $P_{(2)}$  .

### 1-8-5- تعلق التابعي بعدد من التوابع

يمكن استنتاج معادلات اويلر التفاضلية و التي تحققها منحنيات متعلقة بتابعي ما متعلق بلوره بعدة محاولات مستقلة و بعدة توابع بشكل مماثل لما ورد في حالة تعلق هذا التابعي بمتحول مستقل وحيد و تابع وحيد ، و ذلك بعد افتراض متغير خاص لكل تابع يتعلق به التابعي . فلنفترض أن التابعي متعلق بالإضافة إلى  $x^1$  بالتوابع  $x^2, x^3$  و مشتقاتها بالشكل :

$$I = \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1, x^2, x^2, x^1, x^3, x^3, x^1) dx^1 \quad (1.116)$$



نأخذ الآن متغيراً خاصاً لكل تابع من التوابع كما ورد سابقاً بالصيغة :

$$\tilde{x}^2 = x^2 + \varepsilon \eta(x^1) \quad (1.117)$$

$$\tilde{x}^3 = x^3 + \varepsilon \zeta(x^1)$$

$\eta(x^1), \zeta(x^1)$  تابعان عشوائيان يحققان شروط الاستمرارية و  $\varepsilon$  متناه في الصغر . باتباع خطوات مشابهة لما سبق نحصل على المتغير الأول :

$$\delta I = \varepsilon \tilde{I}_{(\varepsilon=0)} = \varepsilon \left\{ \left[ \eta \left( f_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^2,x^1)} \right) + \zeta \left( x^3 - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^3,x^1)} \right) \right] dx^1 \right\} = 0 \quad (1.118)$$

بما يعني أن الشرط اللازم لكي يأخذ  $I$  قيمة حدية يتلخص في تحقق المعادلتين التفاضليتين :

$$f_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^2,x^1)} = 0 \quad (1.119)$$

$$f_{,x^3} - \frac{d}{dx^1} f_{,(x^3,x^1)} = 0$$

و ينتج ذلك مباشرة من عشوائية التابعين  $\eta(x^1), \zeta(x^1)$  ، وهذه المعادلات تحدد المنحنيات التي تعطي تابعي متعلق بها قيمة حدية . أما نوع القيمة الحدية إن كانت صغرى أم عظمى أم قيمة مستقرة فتحددها إشارة المتغير الثاني فإذا كان  $\delta^2 I(0)$  فالقيمة الحدية عظمى وإذا كان  $\delta^2 I = 0$  فالقيمة الحدية مستقرة أما إذا كان  $\delta^2 I(0)$  فالقيمة الحدية صغرى .

#### 1-8-6- متغير تابع متعلق بعدة توابع

ليكن لدينا تابع ما  $f$  متعلق بالتابع  $x^2$  و مشتقه  $x^1, x^2$  أي :

$$f = f(x^2, x^2, x^1) \quad (1.120)$$

و لنفرض أن منحنيات المقارنة للتابعين هي :

$$\tilde{x}^2 = x^2 + \varepsilon \eta(x^1) \quad (1.121)$$

$$\tilde{x}^2_{,x^1} = x^2_{,x^1} + \varepsilon \eta_{,x^1}(x^1)$$

بحسب متغير هذين التابعين وفق العلاقة (1.92) بالشكل :

$$\delta x^2 = \varepsilon \left( \frac{\partial \tilde{x}^2(x^1)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon \eta(x^1) \quad (1.122)$$

$$\delta x^2_{,x^1} = \varepsilon \left( \frac{\partial \tilde{x}^2_{,x^1}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon \eta_{,x^1}(x^1)$$

مشتق التابع بالنسبة للمقدار  $\varepsilon$  هو :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2_{,x^1}} \frac{\partial \tilde{x}^2_{,x^1}}{\partial \varepsilon} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2} \eta(x^1) + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2_{,x^1}} \eta_{,x^1}(x^1) \end{aligned} \quad (1.123)$$

و ذلك باعتبار أن  $f$  تابع لكل من  $\tilde{x}^2$  و  $\tilde{x}^2_{,x^1}$  وكل منهما تابع للمقدار  $\varepsilon$  . وبضرب العلاقة السابقة بالمقدار  $\varepsilon$  وإلغاء  $\varepsilon$  إلى الصفر نحصل بعد ملاحظة العلاقتين (1.122) على :

$$\varepsilon \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2} \varepsilon \eta(x^1) + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2_{,x^1}} \varepsilon \eta_{,x^1}(x^1) \quad (1.124)$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2} \delta x^2 + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2_{,x^1}} \delta x^2_{,x^1}$$

و هكذا نجد أن متغير تابع ما متعلق بعدة متحولات يعامل معاملة التفاضل الكلي والعلاقة التالية تمثل بعض القواعد الأخرى لحساب للتغيرات .

$$\begin{aligned} \delta(f_1 + f_2) &= \delta f_1 + \delta f_2 \\ \delta(f_1 f_2) &= f_1 \delta f_2 + f_2 \delta f_1 \\ \delta\left(\frac{f_1}{f_2}\right) &= \frac{f_2 \delta f_1 - f_1 \delta f_2}{(f_2)^2} \end{aligned} \quad (1.125)$$

حيث  $f_1$  و  $f_2$  توابع على شاكلة التابع  $f$  في العلاقة (1.120). يمكن تعميم النتائج السابقة التي أحريت على توابع متعلقة بمتحول مستقل ومشتقة الأول على توابع ضمنية متعلقة بمتحول مستقل ومشتقاتها بالنسبة لهذا المتحول من الدرجة  $(n)$  وحالات أعم أخرى نلخصها في الحالات التالية:

\* حالة تعلق التابع بمشتقات تابع ما حتى الدرجة  $(n)$

$$I = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x^1, x^2, (x^2)', (x^2)'', \dots, (x^2)^{(n)}) dx^1 \quad (1.126)$$

حيث استبدلت كتابة المشتق  $x^2$  بالكتابة  $(x^2)'$  و  $x^2$  بالكتابة  $(x^2)''$  وهكذا . متغير هذا التابع وفق العلاقة (1.124) من الشكل:

$$\delta I = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \left[ \frac{\partial f}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{\partial f}{\partial (x^2)'} \delta (x^2)' + \frac{\partial f}{\partial (x^2)''} \delta (x^2)'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(n)}} \delta (x^2)^{(n)} \right] dx^1 \quad (1.127)$$

بمكاملة الحدود على الطرف الثاني للعلاقة السابقة بالمتحولة عدة مرات بحيث يكامل  $k$  مرة حسب المشتق من المرتبة  $(k)$  بالشكل :

$$\begin{aligned} \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(k)}} \delta (x^2)^{(k)} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(k)}} \delta (x^2)^{(k-1)} - \frac{d}{dx^1} \frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(k)}} \delta (x^2)^{(k-2)} \right. \\ &\quad + \dots + (-1)^{(k-1)} \frac{d^{k-1}}{(dx^1)^{(k-1)}} \frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(k)}} \delta x^2 \Big|_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \\ &\quad \left. + (-1)^k \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \frac{d^k}{(dx^1)^{(k)}} \frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(k)}} \delta x^2 dx^1 \right] \quad (1.128) \end{aligned}$$

بعد تعويض الحدود المكاملة في العلاقة (1.127) والاشتراط أن  $\delta x^2$  ومشتقاتها حتى المرتبة  $(n-1)$  تنعدم في النقاط البدائية (1) و (2) نحصل على :

$$\delta I = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \left[ \frac{\partial f}{\partial x^2} - \frac{d}{dx^1} \frac{\partial f}{\partial (x^2)'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{(dx^1)^n} \frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(n)}} \right] \delta x^2 = 0 \quad (1.129)$$

و بالتالي تكافئ معادلة اويلر - لاغرنج.

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} - \frac{d}{dx^1} \frac{\partial f}{\partial (x^2)'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{(dx^1)^n} \frac{\partial f}{\partial (x^2)^{(n)}} = 0 \quad (1.130)$$

شرط القيمة الحدية للتابعي I المعتمد في العلاقة (1.126) .

\* حالة تعلق التابعي بمشتقات m تابع حتى الدرجة (n)

$$I = \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1, x^2, (x^2)', \dots, (x^2)^{(n)}, \dots, x^m, (x^m)', \dots, (x^m)^{(n)}) dx^1 \quad (1.131)$$

هذه الحالة مشابهة للحالة السابقة ، و بنتيجة إيجاد المتغير  $\delta I$  نحصل على m معادلة تفاضلية من معادلات اويلر - لاغرنج كذلك المشتقة في العلاقة (1.130) و لا داعي لتكرار مثل هذا الاشتقاق مرة أخرى .

\* حالة كون التابعي تكاملا على السطح

ندرس الآن الحالة التي يكون فيها التابعي تكاملا على سطح ما و متعلقا بمتحولين مستقلين بالإضافة إلى تعلقه بتابعين آخرين ومشتقيهما بالشكل :

$$I = \iint_{\Lambda} f(x^1, x^2, x^3(x^1, x^2), \frac{\partial x^3}{\partial x^1}(x^1, x^2)) dx^1 dx^2 \quad (1.132)$$

تؤخذ توابع المقارنة  $\tilde{x}^3(x^1, x^2)$  على غرار العلاقة (1.93) كما يلي :

$$\tilde{x}^3(x^1, x^2) = x^3(x^1, x^2) + \varepsilon \eta(x^1, x^2) \quad (1.133)$$

حيث  $\varepsilon$  متناه في الصغر ،  $\eta(x^1, x^2)$  تابع عشوائي يحقق شروط الاستمرارية . بأخذ المتغير الأول للعلاقة (1.132) نجد :

$$\delta I = \iint_{\Lambda} \left[ \frac{\partial f}{\partial x^3} \delta x^3 + \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \delta x^3, x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \delta x^3, x^2 \right] dx^1 dx^2 \quad (1.134)$$

ملاحظة أن :

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \delta x^3 \right) = \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \delta x^3, x^1 + \delta x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \right) \quad (1.135)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \delta x^3 \right) = \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \delta x^3, x^2 + \delta x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \right)$$

نحصل من العلاقة (1.134) على :

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_A \left[ \frac{\partial f}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \right) \right] \delta x^3 dx^1 dx^2 \\ & + \iint_A \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \delta x^3 \right) + \frac{\partial f}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \delta x^3 \right) \right] dx^1 dx^2 \end{aligned} \quad (1.136)$$

باستخدام مقولة غاوس التالية في تحويل التكامل السطحي إلى تكامل منحنى :

$$\iint_A (u, x^1 + v, x^2) dx^1 dx^2 = \oint_C (u dx^2 - v dx^1) = \oint_C \left( u \frac{dx^2}{ds} - v \frac{dx^1}{ds} \right) ds \quad (1.137)$$

حيث  $v, u$  تابعين في  $x^2, x^1$  و قابلين للتفاضل  $A$  سطح ما بطرف يمكن أن يكون مولفاً من مجموعة منحنيات تلتقي مع بعضها البعض ولكن يجب أن يكون التقاطعاً أملياً دون انكسار ،  $C$  المنحني الذي يحدها المساحة  $A$  و هو موجه بالتوجيه الرياضي المعروف (إذا دارت أصابع اليد اليمنى على المنحني يكون إصبع اليمين متطابقاً مع النواظم الموجب للمساحة )  $x^2(s), x^1(s)$  هي توابع التمثيل الوسيط للمنحني  $C$ ،  $s$  هو الطول المنحني . يمكن تحويل الحد الثاني من الطرف الأيمن للعلاقة (1.136) لنحصل على :

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_A \left[ \frac{\partial f}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \right) \right] \delta x^3 dx^1 dx^2 \\ & + \oint_C \left[ \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \frac{dx^2}{ds} - \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \frac{dx^1}{ds} \right] \delta x^3 ds = 0 \end{aligned} \quad (1.138)$$

و باعتبار أن التكامل المنحني ينعدم من أجل الشروط الطرفية المحددة للمسألة كما أسلفنا في الفقرة 1-8-1 أي أن  $(\delta x^3 = 0)$  على الطرف (الشرط الإجباري في تعريف المتغير (1.133) ) أو من أجل الشروط الطبيعية حيث

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \frac{dx^2}{ds} - \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \frac{dx^1}{ds} \right] = 0 \quad (1.139)$$

في هذه الحالة تتمثل معادلة أويلر - لاغرانج بالمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$\frac{\partial f}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3, x^2} \right) = 0 \quad (1.140)$$

وهي مكافئة لشرط انعدام المتغير الأول للتابعي  $I$ .

## 9-1 المبرهنات الأساسية لحساب المتغيرات

### 1-9-1 المبرهنة الأولى

لنفترض أن التابع العشوائي  $\eta(x^1)$  مستمر إلى جانب مشتقه الأول في المجال  $[x^1(1), x^1(2)]$  و قيمه معلومة في نقطة البدء ونقطة النهاية من هذا المجال و أن  $f(x^1)$  تابع في المجال نفسه . فإذا كان التكامل التالي:

$$\int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1) \eta(x^1) dx^1 = 0 \quad (1.141)$$

عقفاً فهذا يعني بالضرورة أن التابع  $f(x^1)$  معلوم في كل نقاط هذا المجال أي :

$$f(x^1) = 0; \quad \forall x^1 \in [x^1(1), x^1(2)]$$

يمكن برهان هذه المقولة بشكل غير مباشر . لنفرض أن التابع  $f(x^1)$  في نقطة ما مسن المجال  $x^1 = \xi^1$  مغاير للصفر مثلاً أكبر من الصفر  $f(\xi^1) > 0$  فوق خاصية الاستمرارية يكون التسليع في المجال الجزئي  $[\xi^1(1), \xi^1(2)]$  الواقع ضمن المجال الكلي  $[x^1(1), x^1(2)]$  أيضاً موجباً . لنختار  $\eta(x^1)$  بالشكل :

$$\eta(x^1) = \begin{cases} 0 & \text{for } x^1(1) \leq x^1 \leq \xi^1(1) \\ (x^1 - \xi^1(1))^2 (x^1 - \xi^1(2))^2 & \text{for } \xi^1(1) \leq x^1 \leq \xi^1(2) \\ 0 & \text{for } \xi^1(2) \leq x^1 \leq x^1(2) \end{cases} \quad (1.142)$$

هذا التابع يحقق كل الشروط الواردة في المقولة . و ذلك لأن  $\eta(x^1(1)) = \eta(x^1(2)) = 0$  و كذلك الجداء  $(x^1 - \xi^1(1))^2 (x^1 - \xi^1(2))^2$  و مشتقه الأول يتعدمان من أجل  $x^1 = \xi^1(1)$  و  $x^1 = \xi^1(2)$  و خارج المجال  $[\xi^1(1), \xi^1(2)]$  يكون التابع  $\eta(x^1)$  مطابق للصفر . و باعتبار أن التابع  $\xi^1(x^1)$  خارج المجال  $[\xi^1(1), \xi^1(2)]$  مطابق للصفر فيمكن كتابة التكامل (1.141) بالشكل :

$$\int_{\xi^1(1)}^{\xi^1(2)} f(x^1) (x^1 - \xi^1(1))^2 (x^1 - \xi^1(2))^2 dx^1 \quad (1.143)$$

و لهذا التكامل قيمة موجبة وفق المبرهنة الموسعة للقيمة المتوسطة للتكامل المحدود و القائلة بأنه إذا كان التابعان  $f(x^1), g(x^1)$  مستمرين في مجال ما  $[x^1(1), x^1(2)]$  و  $f(x^1)$  يحافظ على إشارته في المجال فإنه في المجال  $[x^1(1), x^1(2)]$  قيمة واحدة على الأقل  $\xi^1$  بحيث يكون :

$$\int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1)g(x^1)dx^1 = g(\xi^1)\int_{x^1(1)}^{x^1(2)} f(x^1)dx^1 \quad (1.144)$$

و باعتبار أنه للتكامل (1.143) قيمة موجبة و هو بالفرض معلوم فهذا يعني أننا توصلنا إلى نتيجة متناقضة للفرض القائل بأن التابع  $f(x^1)$  مغاير للصفر و هذا بدوره يقتضي بأن يكون التابع  $f(x^1)$  مطابقا للصفر . و يمكن الآن برهان نفس النتيجة لحالة التكامل الثنائي .

## 1-9-2- المبرهنة الثانية

بافتراض أن التابع العشوائي  $\eta(x^1, x^2)$  مستمر إلى جانب مشتقاته الجزئية من المرتبة الأولى في المجال B و بنعدم على الطرف L لهذا المجال و أن  $f(x^1, x^2)$  تابع مستمر في المجال نفسه فإذا كان التكامل :

$$\iiint_B f(x^1, x^2)\eta(x^1, x^2)dx^1dx^2 = 0 \quad (1.145)$$

عقفا فهذا يعني بالضرورة أن  $f(x^1, x^2)$  مطابق للصفر في المجال B . البرهان على ذلك نفترض أن التابع  $f(x^1, x^2)$  مغاير للصفر وليكن على سبيل المثال موجبا في نقطة  $p(\xi^1, \xi^2)$  ما من المجال B ، بفضل استمرارية هذا التابع فهو موجب أيضا في دائرة واقعة في جوار p نصف قطرها p و موجودة كليا ضمن المجال B . نختار الآن التابع العشوائي  $\xi(x^1, x^2)$  بالشكل :

$$\eta(x^1, x^2) = \begin{cases} 0 & \text{for } (x^1 - \xi^1)^2 + (x^2 - \xi^2)^2 \geq p^2 \\ [(x^1 - \xi^1)^2 + (x^2 - \xi^2) - p^2] & \text{for } (x^1 - \xi^1)^2 + (x^2 - \xi^2)^2 < p^2 \end{cases} \quad (1.146)$$

و هذا التابع العشوائي يحقق كل متطلبات المبرهنة السابقة و التكامل (1.145) ينقلص ليصبح تكاملا لتابع موجب على مساحة الدائرة بنصف القطر p و هو لهذا السبب موجب . و هذا مناقض للفرض ، أي أن  $f(x^1, x^2)$  مطابق للصفر . للمبرهتان الأولى و الثانية تبيان صحيحتين

عندما يخضع التابع العشوائي  $\eta$  إلى شروط طرفية أقصى . كان نطلب أن يكون التابع مشتقات مستمرة حتى الدرجة  $n$  وأن ينعدم هو و مشتقاته ال  $(n-1)$  في النقاط الطرفية للمجال  $[x^{(1)}, x^{(2)}]$  أو الطرف  $L$  للمجال  $B$  يبقى الرهان للحالة الأخيرة كما في السابق و تستبدل القوة 2 في العلاقتين (1.142), (1.146) بالقوة  $n+1$  . و كذلك الأمر يمكن برهان المقولتين السابقتين للتكامل الثلاثي و للتكامل البعدي من المرتبة  $n$  .

### 3-9-1 المبرهنة الثالثة

إذا كان التابع  $g(x^1)$  مستمرا في المجال  $[x^{(1)}, x^{(2)}]$  و كان التكامل :

$$\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} g(x^1) \eta'(x^1) dx^1 = 0 \quad (1.147)$$

من أجل أي تابع  $\eta(x^1)$  المستمر هو و مشتقاته في المجال  $[x^{(1)}, x^{(2)}]$  و تحقق للشرط الطرفي  $\eta(x^{(1)}) = \eta(x^{(2)})$  فهذا يعني أن  $g(x^1)$  ثابت .  
نبدأ الرهان بفرض أن :

$$c = \frac{1}{x^{(2)} - x^{(1)}} \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} g(x^1) dx^1 \quad (1.148)$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل :

$$\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} [g(x^1) - c] dx^1 = 0 \quad (1.149)$$

نختار الآن التابع العشوائي  $\eta(x^1)$  كاليلي:

$$\eta(x^1) = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} [g(t) - c] dt, \eta'(x^1) = [g(x^1) - c] \quad (1.150)$$

و تصبح المعادلة (1.147) موائقة للمعادلة التالية :

$$\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} g(x^1) [g(x^1) - c] dx^1 = 0 \quad (1.151)$$

نضرب طرفي المعادلة (1.149) بالثابت  $-c$  فينتج:

$$\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} -c [g(x^1) - c] dx^1 = 0 \quad (1.152)$$



و يجمع المعادلتين (1.151), (1.152) نحصل على:

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} [g(x^1) - c] dx^1 = 0 \quad (1.153)$$

و عليه يكون  $g(x^1) = c$

#### 1-4 المبرهنة الرابعة

إذا كان التابعان  $b(x^1), a(x^1)$  مستمرين في المجال  $[x_1^{(1)}, x_1^{(2)}]$  و تحقق التكامل :

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} [a(x^1)\eta(x^1) + b(x^1)\eta'(x^1)] dx^1 = 0 \quad (1.154)$$

من أجل أي تابع  $\eta(x^1)$  يحقق للشروط التي يحققها التابع نفسه في المبرهنة الثالثة فيجب أن

$$b'(x^1) = a(x^1) \text{ للمشتق } [x_1^{(1)}, x_1^{(2)}]$$

نفرض أولاً أن  $A(x) = \int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} a(t) dt$  فنحصل بعد استعمال التكامل بالتجزئة ومراعاة الشروط الطرفية للتابع العشوائي على:

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} a(x^1)\eta(x^1) dx^1 = - \int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} A(x^1)\eta'(x^1) dx^1 \quad (1.155)$$

و بهذا تصبح العلاقة (1-154) كما يلي :

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} [-A(x^1) + b(x^1) dx^1] \eta'(x^1) dx^1 = 0 \quad (1.156)$$

ووفق المبرهنة الثالثة يكون :

$$b(x^1) = A(x^1) + c = \int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} a(t) dt + c \quad (1.157)$$

و عليه نحصل باشتقاق الطرفين على:

$$b'(x^1) = a(x^1) \quad (1.158)$$

تقدم قواعد حساب للمتغيرات المشروحة في الفقرات السابقة الغطاء النظري للطرق التقريبية التي يتم فيها تشكيل تابعي كطرق الطاقة التي ستعرض لها في فصول لاحقة وطرق العناصر المنتهية التي تعتمد الطاقة كمعيار أو كضابط أساسي. إذ يمكن وفق قواعد حساب للمتغيرات افتراض تواضع

تقريبية متعلقة بثوابت اختيارية يتم تحديدها من شرط انعدام المتغير الأول للتابعي الخاص بالمسألة المطروحة.

وقبل الشروع في حل بعض الأمثلة الإيضاحية لما ورد في بعض من الفقرات النظرية سنستعرض باختصار حل المعادلة التكعيبة لحاجتنا إليها أثناء حساب الإجهادات الرئيسية .

### 10-1- حلول المعادلة التكعيبة

ليكن لدينا المعادلة العامة من الدرجة الثالثة

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0; \quad A \neq 0 \quad (1.159)$$

بالقسمة على A تتحول هذه المعادلة إلى الشكل:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0; \quad a = \frac{B}{A}; \quad b = \frac{C}{A}; \quad c = \frac{D}{A} \quad (1.160)$$

نحاول الآن حذف أمثال  $x^2$  لذلك نجري التحويل:

$$x = y - \frac{a}{3} \quad (1.161)$$

فتأخذ المعادلة (1.160) بعد تعويض التحويل السابق فيها الشكل المبسط التالي:

$$y^3 + py + q = 0 \quad (1.162)$$

بحسب مميز هذه للمعادلة بالشكل:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (1.163)$$

ووفق قيمة مميز هذه المعادلة نميز ثلاث حالات :

فإذا كان  $\Delta > 0$  هناك حل حقيقي واثنان عقدانيان.

وإذا كان  $\Delta = 0$  هناك ثلاث حلول حقيقية أحدها مضاعف.

أما إذا كان  $\Delta < 0$  فهناك ثلاث حلول حقيقية.

تعطى الحلول العامة للمعادلة التكعيبة وفق كاردان كما يلي:

$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}i\sqrt{3} \quad (1.164)$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}i\sqrt{3}$$

حيث:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned} \quad (1.165)$$

وهذه الحلول يمكن الحصول عليها عن طريق حسابها باستخدام التوابيع المثلثية للحالة التي يكون فيها  $\Delta < 0$  والتي تملك ثلاث جذور حقيقية حيث تحسب هذه الجذور وفق الترتيب التالي:  
نحسب أولا الزاوية  $\varphi$  بحساب جيب تمامها :

$$\cos \varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}} \quad (1.166)$$

ومن ثم نحسب الجذور الحقيقية الثلاثة للمعادلة بالترتيب التالي:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt[3]{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos \frac{\varphi}{3} \\ y_2 &= 2\sqrt[3]{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right) \\ y_3 &= 2\sqrt[3]{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right) \end{aligned} \quad (1.167)$$

وقبل الانتقال إلى الفصل اللاحق سوف نستعرض عددا من الأمثلة لتعميق فهمنا للمواضيع التي نوقشت في هذا الفصل.

مثال 1-1:

لدينا في نقطة p من جسم ما حالة إجهادية محددة بالمركبات :

$$\sigma^l = \begin{pmatrix} 2. & -2. & 0. \\ -2. & 4. & -2. \\ 0. & -2. & 4. \end{pmatrix} \quad \text{kN/mm}^2$$

والمطلوب :

- إيجاد المركبتين التآظمية  $t_N$  والمماسية  $t_S$  على وفي مستوي محدد بالمعادلة:

$$4x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 1$$

- حساب الإجهادات الرئيسية في النقطة p .

- تعيين نواظم للمستويات الرئيسية.

في البدء نعين الناظم على المستوي المذكور

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(4x^1 + 2x^2 - 2x^3 - 1)}{\sqrt{4x^1 + 2x^2 - 2x^3 - 1}} = \frac{4\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2 - 2\mathbf{e}^3}{\sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}}(4\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2 - 2\mathbf{e}^3)$$

وبعلها نحسب مركبات محصلة الإجهادات الكلية المؤثرة على المستوي الذي ناظمه  $\mathbf{n}$

$$t_N^l = \sigma^l n_j = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2. & -2. & 0. \\ -2. & 4. & -2. \\ 0. & -2. & 4. \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

ثم نحسب المركبتين التآظمية  $t_N$  والمماسية  $t_S$

$$t_N = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2.$$

$$t_S = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_N^2} = \sqrt{\frac{176}{24} - 4} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.8257$$

لنحسب الآن الإجهادات الرئيسية والمساوية لجذور المعادلة المميزة لمعين مصفوفة الأمثال:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2. & 0. \\ -2. & 4.-\lambda & -2. \\ 0. & -2. & 4.-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{or} \quad -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

$$I_1 = 2 + 4 + 4 = 10$$

$$I_2 = 2 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 2 - [(-2)^2 + (0)^2 + (-2)^2] = 24$$

$$I_3 = \det \sigma^0 = 2(16 - 4) + 2(-8) = 8$$

وتصبح المعادلة المميزة كالتالي:

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 24\lambda + 8 = 0$$

نجري التحويل:

$$\bar{\lambda} = \lambda - \frac{10}{3}; \quad \lambda = \bar{\lambda} + \frac{10}{3}$$

فنحصل على المعادلة المبسطة:

$$-\bar{\lambda}^3 - \frac{28}{3}\bar{\lambda} - \frac{56}{27} = 0; \quad y^3 + py + q = 0$$

ونميزها يساوي:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-56}{2 \times 27}\right)^2 + \left(\frac{-28}{3 \times 3}\right)^3 < 0$$

وبالتالي للمعادلة ثلاث جذور حقيقية نحسب بعد حساب :

$$\cos \varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \frac{-\left(-\frac{56}{54}\right)}{\sqrt{\left(\frac{-28}{3}\right)^3}} = 0.18898; \quad \varphi = 79.1066$$

كالتالي:

$$\bar{\lambda}_1 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos\frac{\varphi}{3} = 3.160626; \quad \lambda_1 = 6.493959$$

$$\bar{\lambda}_2 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right) = -2.223417; \quad \lambda_2 = 3.109916$$

$$\bar{\lambda}_3 = 2\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right) = -2.937209; \quad \lambda_3 = 0.396125$$

والقيم (0.396125, 3.109916, 6.493959) هي قيم الإجهادات الرئيسية الثلاثة.

لنحسب الآن نواظم المستويات الرئيسية الموافقة للإجهادات الرئيسية.

تعيين ناظم المستوي الرئيسي الموافق للإجهاد الرئيسي  $\lambda_1 = 6.493959$ :

نعرض هذه القيمة في جملة المعادلات للتجانسة فنحصل على جملة المعادلات لتعيين اتجاهات الناظم

:

$$\begin{pmatrix} 2. - 6.494 & -2. & 0. \\ -2. & 4. - 6.494 & -2. \\ 0. & -2. & 4. - 6.494 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.494 & -2. & 0. \\ -2. & -2.494 & -2. \\ 0. & -2. & -2.494 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

لنختار  $n_1 = 1$ . فتكون مركبات الناظم المطلوب كالتالي :

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 2.247 \\ -1.802 \end{pmatrix}$$

أو يمكن حساب مركبات الناظم الواحدي بقسمة مركبات الناظم السابق على جذر مجموع مربع

للمركبات لنحصل على:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.328 \\ 0.737 \\ -0.591 \end{pmatrix}$$

وبشكل مماثل نحسب النواظم المتبقية فنجد أن الناظم الواحدي الموافق للإجهاد الرئيسي

$\lambda_2 = 3.110$  معطى بالشكل :

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.591 \\ -0.328 \\ -0.737 \end{pmatrix}$$

والناظم الواحدي الموافق للإجهاد الرئيسي  $\lambda_3 = 0.396$  معطى بالشكل :

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.737 \\ 0.391 \\ 0.328 \end{pmatrix}$$

مثال 1-2:

بين نقطتين  $p_1$  و  $p_2$  واقعتين على ارتفاع مختلف و لكن ليس على نفس المحور الشقلولي  $x^2$  ، يطلب البحث عن أقصر منحنى يصل بينهما و الذي إذا تدرجرت عليه نقطة مادية تحت تأثير ثقلها فقط قطعت للمسافة على المنحنى المطلوب في أقصر زمن ممكن .

الحل:

لنفرض أن معادلة المنحنى :

$$x^2 = x^2(x^1)$$

تمطى سرعة النقطة المادية بالعلاقة:

$$v = \sqrt{2gx^2}$$

والسرعة هي مشتق المسافة بالنسبة للزمن ومنها يمكن حساب الزمن التفاضلي  $dt$  لقطع مسافة

تفاضلية  $ds$ :

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

تحسب المسافة التفاضلية  $ds$  كما نعلم وفق العلاقة:

$$ds = \sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2} dx^1$$

وبالتالي يكون الزمن التفاضلي  $dt$  لقطع مسافة تفاضلية  $ds$ :

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2}}{\sqrt{2gx^2}} dx^1; \quad t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} \frac{\sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2}}{\sqrt{x^2}} dx^1$$

معادلة اويلر التفاضلية:

$$F_{,x^2} - \frac{d}{dx^1} F_{,(x^2,x^1)} = 0$$

التابع  $F$  لا يحوي  $x^1$  لذلك يمكن كتابة معادلة اويلر السابقة بالشكل :

$$\frac{dF}{dx^2} - \frac{dF_{,(x^2,x^1)}}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{dx^1} = 0$$

والتي يمكن اختصارها كما يلي:

$$\frac{d}{dx^2} (F - x^1 F_{,(x^2,x^1)}) = 0$$

والتكامل المباشر لهذه المعادلة هو:

$$F - x^1 F_{,(x^2,x^1)} = c$$

نحسب الآن مشتق  $F$  بالنسبة للمشتق  $x^2, x^1$  فنجد أن:

$$F_{,(x^2,x^1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2} (1 + (x^2, x^1)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x^1, x^1$$

وبعد تعويض هذه القيمة وقيمة التابع  $F$  في التكامل المباشر لمعادلة اويلر نحصل على:

$$\frac{\sqrt{1 + (x^2, x^1)^2}}{\sqrt{x^2}} - \frac{(x^2, x^1)^2}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + (x^2, x^1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}$$

$$(x^2, x^1)^2 = \frac{c_1 - x^2}{x^2}$$

بفرض أن:

$$x^2 = \frac{c_1}{2} (1 - \cos u)$$

يكون:

$$x^2, x^1 = \frac{c_1}{2} u' \sin u$$

بالتعويض في المعادلة  $(x^2, x^1)^2 = \frac{c_1 - x^2}{x^2}$  وفصل متحولات المعادلة الناتجة نحصل على :



$$\frac{c_1}{2}(1 - \cos u) du = \pm dx^1$$

وبإجراء تكامل هذه المعادلة نحصل على التمثيل الوسيط للمنحني المطلوب:

$$x^1 = \pm \frac{c_1}{2}(u - \sin u) + c_2 \quad x^2 = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)$$

وهي المعادلات الوسيطة للمنحني المعروف بالسيكلويد .

مثال 1-3 :

يطلب حل المثال السابق بإجراء تكامل معادلة أويلر التفاضلية بالطريقة الاعتيادية أي دون اللجوء إلى التكامل المباشر .

كما وجدنا يعطى تابعي المسألة المطروحة بالشكل:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x^1(1)}^{x^1(2)} \frac{\sqrt{1 + (x^2, x^1)^2}}{\sqrt{x^2}} dx^1$$

أي أن تابع لاغرنج  $F$  يكافئ بعد استبعاد الثابت  $\frac{1}{\sqrt{2g}}$  ، الذي يختزل عند التعويض في معادلة

أويلر، مايلي:

$$F = \frac{\sqrt{1 + (x^2, x^1)^2}}{\sqrt{x^2}} dx^1$$

وبهذا يصبح الحد الأول من معادلة أويلر التفاضلية كالتالي:

$$F_{,x^2} = - \frac{\sqrt{1 + (x^2, x^1)^2}}{2(x^2)^{3/2}}$$

ويصبح الحد الثاني بعد إتمام عملية الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمشتق  $x^2, x^1$  والتام بالنسبة للمتحول المستقل  $x^1$  كما يلي:

$$\frac{d}{dx^1} F_{(x^2, x^1)} = -\frac{(x^2, x^1)^2}{2(x^2)^{3/2} \sqrt{1+(x^2, x^1)^2}} + \frac{x^2, x^1}{(x^2)^{1/2} [1+(x^2, x^1)^2]^{3/2}}$$

وبالتعويض في معادلة أولر نحصل على:

$$-\frac{\sqrt{1+(x^2, x^1)^2}}{2(x^2)^{3/2}} - \left[ -\frac{(x^2, x^1)^2}{2(x^2)^{3/2} \sqrt{1+(x^2, x^1)^2}} + \frac{x^2, x^1}{(x^2)^{1/2} [1+(x^2, x^1)^2]^{3/2}} \right] = 0$$

وبتوحيد المخارج وإجراء بعض الاختصارات نتيج لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$2x^2 \cdot x^2, x^1 + (x^2, x^1)^2 + 1 = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الشكل:

$$\phi(y, y', y'') = 0$$

حيث استبدلنا الرمز  $x^2$  بالرمز  $y$

$$2y \cdot y_{xx} + y'^2 + 1 = 0$$

هذه المعادلة خالية من المتحول  $x$  نقوم بتخفيض مرتبتها بفرض أن:

$$\frac{dy}{dx} = Z(y) \quad y_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = Z_y Z$$

وهذا تتحول المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية إلى معادلة من المرتبة الأولى:

$$2 \cdot y \cdot Z \cdot Z_y + Z^2 + 1 = 0$$

نقوم الآن بفصل متحولات هذه الأخيرة لتصبح:

$$-\frac{dy}{y} = \frac{2Z \cdot dZ}{1+Z^2}$$

نجز تكامل طرفي المعادلة السابقة لنحصل على:

$$\ln c_1 + \ln \frac{1}{Y} = \int \frac{2Z \cdot dZ}{1+Z^2} = \ln(1+Z^2); \quad y = \frac{c_1}{1+Z^2}$$

بفرض أن:

$$\frac{dy}{dx} = Z = \text{tg} \frac{u}{2}$$

نحصل باستخدام العلاقات الثلاثية على:

$$y = \frac{c_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = c_1 \cos^2 \frac{u}{2} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)$$

ومشتق هذا التابع بالنسبة للمتحول  $x$  هو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{c_1}{2} \sin u \frac{du}{dx} = Z = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

ومن العلاقة السابقة نحصل على  $dx$  بدلالة  $u$

$$dx = \frac{\frac{c_1}{2} \sin u du}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} = \frac{\frac{c_1}{2} 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} du}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} = c_1 \cos^2 \frac{u}{2} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u) du$$

وبعد إنجاز تكامل الطرفين ينتج:

$$x = \frac{c_1}{2}(u - \sin u) + c_2$$

وبالتالي يتمثل المنحني الناتج عن تكامل معادلة اويلر وسيطياً بالمعادلتين التاليتين:

$$x = \frac{c_1}{2}(u - \sin u) + c_2$$

$$y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)$$

وهما المعادلتان الوسيطتان للسيكلويد .

#### مثال 1-4:

من بين كل للمنحنيات الواقعة في المستوي  $(x^1, x^2)$  و التي تربط بين النقطتين  $p_1, p_0$  الواقعتين فيه يطلب البحث عن ذلك الذي إذا دار حول المحور  $x^1$  ولّد أصغر مساحة ممكنة . يعطى تفاضل الطول للمنحني كما رأينا بالشكل:

$$ds = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)^2} dx^1$$

ويكون تفاضل المساحة الناتجة عن دوران المنحني حول المحور  $x^1$  كما يلي:

$$dA = 2\pi x^2 ds = 2\pi x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)^2} dx^1$$

وبالتالي تكون المساحة الناتجة عن الدوران:

$$A = \int_{x^1(0)}^{x^1(l)} 2\pi x^2 \sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2} dx^1$$

نعتبر أن التابع بالشكل :

$$I = \int_{x^1(0)}^{x^1(l)} x^2 \sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2} dx^1$$

التابع  $F$  لا يحوي بشكل صريح على  $x^1$  فالتكامل المباشر لمعادلة أولير التفاضلية يعطي:

$$F - (x^{2,x^1}) F_{(x^{2,x^1})} = c$$

ولكن لدينا:

$$F_{(x^{2,x^1})} = \frac{x^2 \cdot 2(x^{2,x^1})}{2\sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2}} = \frac{x^2 \cdot (x^{2,x^1})}{\sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2}}$$

وهذا يفضي إلى المعادلة التالية:

$$x^2 \sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2} - \frac{x^2 \cdot (x^{2,x^1})^2}{\sqrt{1 + (x^{2,x^1})^2}} = c_1$$

والتي تصبح بعد الاختصار وفصل متحولاتها كالتالي:

$$\frac{c_1 dx^2}{\sqrt{(x^2)^2 - c_1^2}} = dx^1$$

وبعد إنجاز تكامل الطرفين وإجراء بعض العمليات الرياضية نحصل على معادلة المنحني المطلوب

$$x^1 - c_2 = c_1 \ln(x^2 + \sqrt{(x^2)^2 - (c_1)^2}) - c_1 \ln c_1; \quad x^2 + \sqrt{(x^2)^2 - (c_1)^2} = c_1 e^{\frac{x^1 - c_2}{c_1}}$$

$$x^2 = \frac{c_1}{2} \left( e^{\frac{x^1 - c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x^1 - c_2}{c_1}} \right) = c_1 \cosh \frac{x^1 - c_2}{c_1}$$

وهي معادلة منحنى جيبي قطبي .

## مثال 1-5:

تعطي الطاقة الكامنة لحالة جاذب طوله 1 يعمل فقط على الانعطاف ومعرض لحمولة موزعة  $\bar{q}$  بالشكل:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^1 w_{,xx} EI w_{,xx} dx - \int_0^1 \bar{q} w dx$$

حيث  $w$  مهم الانعطاف للجاذب. والمطلوب:

- إيجاد المتغير الأول للتابعي  $\Pi$
- إيجاد معادلة اويلر الموافقة لشرط انعدام المتغير الأول للتابعي  $\Pi$
- استنتاج الشروط الطرفية التي يجب أن يحققها تابع الإنتقالات  $w$

يعطي المتغير الأول للتابعي  $\Pi$  بالشكل:

$$\delta \Pi = \int_0^1 w_{,xx} EI \delta w_{,xx} dx - \int_0^1 \bar{q} \delta w dx = 0$$

للحصول على معادلة اويلر نبدأ بتحويل الحد الأول باستخدام قاعدة مشتق جداء مضارب ومبرهنة غاوص

$$\begin{aligned} \int_0^1 (w_{,xx} EI \delta w_{,xx})_{,x} dx &= \int_0^1 w_{,xx} EI \delta w_{,xx} dx + \int_0^1 (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w_{,x} dx \\ \int_0^1 w_{,xx} EI \delta w_{,xx} dx &= w_{,xx} EI \delta w_{,x} \Big|_0^1 - \int_0^1 (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w_{,x} dx \end{aligned}$$

بمكاملة الحد الأخير من العلاقة السابقة بنفس الأسلوب على غرار ما سبق نحصل على:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [(w_{,xx} EI)_{,x} \delta w]_{,x} dx &= \int_0^1 (w_{,xx} EI)_{,xx} \delta w dx + \int_0^1 (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w_{,x} dx \\ - \int_0^1 (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w_{,x} dx &= -(w_{,xx} EI)_{,x} \delta w \Big|_0^1 + \int_0^1 (w_{,xx} EI)_{,xx} \delta w dx + \end{aligned}$$

ويصبح الحد الأول المذكور كالتالي:

$$\int_0^l w_{,xx} EI \delta w_{,xx} dx = w_{,xx} EI \delta w_{,x} \Big|_0^l - (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w \Big|_0^l + \int_0^l (w_{,xx} EI)_{,xx} \delta w dx$$

بالعودة إلى العلاقة الأساسية التي تحدد المتغير الأول وتعويض العلاقة الأخيرة فيها وإخراج  $\delta$  خارج الأقواس نحصل على المعادلة التالية:

$$\delta \Pi = \int_0^l (w_{,xx} EI)_{,xx} - \bar{q} \delta w dx + w_{,xx} EI \delta w_{,x} \Big|_0^l - (w_{,xx} EI)_{,x} \delta w \Big|_0^l = 0$$

وتكون معادلة اويلر الموافقة لشرط انعدام المتغير الأول للتابعي  $\Pi$  كالتالي:

$$(w_{,xx} EI)_{,xx} - \bar{q} = 0; \quad \frac{d^2}{dx^2} (EI w_{,xx}) - \bar{q} = 0$$

وحتى تكون معادلة اويلر السابقة مكافئة للصفر يجب أن تتحقق الشروط الطرفية التالية:

$$\delta w_{,x}(x=0) = \delta w_{,x}(x=l) = 0$$

$$\delta w(x=0) = \delta w(x=l) = 0$$

## 11-1- المصادر العلمية

- 1 . Mueller, H .  
Baumechanik ( Stabtragwerke ), Lehrbriefe (1-10 ) Zentralstelle fuer  
Hochschulfernstudium , Dresden 1982 .
- 2 . Goldner , H . ; Holzweiszg , F .  
Leitfaden der technischen Mechanik  
Fachbuchverlag , Leipzig 1982 .
- 3 . Reddy , J . N .  
Energy and Variational Methods in Applied Mechanics with an

- Introduction to The Finite Element Method .  
 John Wiley and Sohn , New York . Chister . Brisbane Toronto  
 . Singapore ,1984 .
- 4 . Smirnow , W , I .  
 Lehrgang der Hoeheren Mathematik , IV/1  
 Deutscher Verlag der Wissenschaften , Berlin 1988 .
- 5 . Klingbeil , E .  
 Tensorrechnung fuer Ingenieure , BI Hochschultaschenbuecher Band  
 197 , Wissenschaftsverlag Mannheim /Wien/ Zuerich , 1989 .





## 2- معادلات نظرية المرونة في جملة الإحداثيات الديكارتية

تبين من الفصل الأول أنه لنسب بمجهيل نظرية المرونة اختيرت جملتان إحداثيتان إحداها سميت جملة القاعدة الأساسية محاورها الإحداثية  $x^1, x^2, x^3$  وأشعتها المرتبطة بها  $e_1, e_2, e_3$  والأخرى سميت جملة القاعدة الضدية محاورها الإحداثية  $x_1, x_2, x_3$  وأشعتها المرتبطة بها  $e^1, e^2, e^3$  و هاتان الجملتان متطابقتان في حالة الجمل الإحداثية الديكارتية المتعامدة النظامية وطويلة أشعتها المرتبطة بها هي واحدة الطول. ويمكن نسب بمجهيل نظرية المرونة إلى إحدى الجملتين أو كليهما ويمكن الانتقال بواسطة دساتير التحويل بين الجمل الإحداثية المختلفة. وقد جرت العادة أن تنسب الانتقالات والتشوهات أو ما يسمى بالمجاهيل الحركية (الكينماتيكية) لنظرية المرونة إلى جملة القاعدة الضدية، فالمركبات الثلاثة لاتنقل نقطة ما من وسط إنشائي  $u_1, u_2, u_3$  في اتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة  $x_1, x_2, x_3$  على التوالي والتي تحدد الوضعية الانتقالية لنقطة ما تحديداً تاماً تكتب قرائنها في الأسفل و يعبر عنها اختصاراً  $u_i$ . كما أن مركبات التشوهات التي تحدد وضعية الوسط الإنشائي المتشوه هي تسعة تشوهات وعدد التشوهات المستقلة منها ستة فقط بسبب خاصية التناظر، ثلاثة منها تشوهات ناظمة و ثلاثة أخرى تشوهات مماسية وترتب هذه التشوهات في مصفوفة ما يسمى بمصفوفة موثر التشوهات  $\varepsilon_{ij}$ . أما بالنسبة للإجهادات المجهولة و التي تحدد الحالة الإجهادية للجسم المتشوه فهي تسعة إجهادات ستة منها مستقلة فقط وهي تنسب عادة إلى جملة القاعدة الأساسية ولذلك تكتب قرائنها في الأعلى وترتب عادة في مصفوفة ما يسمى بمصفوفة موثر الإجهادات  $\sigma^{ij}$ . وباختصار يلزم في نظرية المرونة لتعيين الحالة الانتقالية وحالة التشوهات والحالة الإجهادية في جسم ما حساب خمسة عشر مجهولاً وهي:

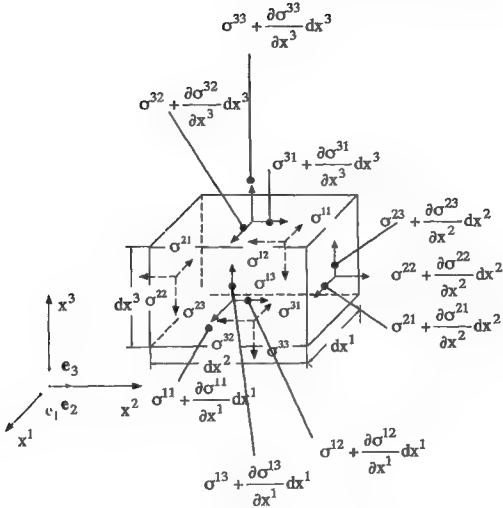
- ثلاث انتقالات  $u_i$

- ستة تشوهات  $\varepsilon_{ij}$  ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ )

- ستة إجهادات  $\sigma^{ij}$  ( $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$ )

و لتعيين هذه المجاهيل لدينا مجموعة من المعادلات التفاضلية والجبرية وعددها خمسة عشر معادلة تحدها معادلات التوازن وعلاقات التشوهات - الانتقالات وقانون السلوك تعرض فيما يلي:

## 1-2- معادلات العوازن



شكل (1-2) : تزايد الإجهادات في متوازي مستطيلات بأبعاد تفاضلية

نقتطع من الجسم المنسوب إلى جملة القاعدة الأساسية عنصرا حقيقيا بشكل متوازي مستطيلات متناهي في الصغر ، أطوال أضلاعه هي التفاضلات  $dx^1, dx^2, dx^3$  . كل وجهين من وجوهه

عمودين على أحد المحاور الإحداثية و موازيين بالتالي للمستوي المشكل بالمحورين الآخرين . لرصد تغير توابع الإجهادات في البداية مثلا باتجاه المحور الإحداثي  $x^1$  ننشر توابع الإجهادات المؤثرة على وجه متوازي للمستطيلات العمودي على المحور  $x^1$  و هي  $\sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{13}$  وذلك باتجاه المحور  $x^1$  وفق سلسلة تاييلور

$$\begin{aligned}\sigma^{11}(x^1 + dx^1, x^2, x^3) &= \sigma^{11}(x^1, x^2, x^3) + \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial x^1} \frac{dx^1}{1!} + \frac{\partial^2 \sigma^{11}}{(\partial x^1)^2} \frac{(dx^1)^2}{2!} + \dots \\ \sigma^{12}(x^1 + dx^1, x^2, x^3) &= \sigma^{12}(x^1, x^2, x^3) + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^1} \frac{dx^1}{1!} + \frac{\partial^2 \sigma^{12}}{(\partial x^1)^2} \frac{(dx^1)^2}{2!} + \dots \\ \sigma^{13}(x^1 + dx^1, x^2, x^3) &= \sigma^{13}(x^1, x^2, x^3) + \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial x^1} \frac{dx^1}{1!} + \frac{\partial^2 \sigma^{13}}{(\partial x^1)^2} \frac{(dx^1)^2}{2!} + \dots\end{aligned}\quad (2.1)$$

و بشكل مماثل نحصل على تغير توابع الإجهادات باتجاه المحورين الآخرين  $x^2, x^3$  . بعد إكمال كافة حدود المراتب العليا في سلسلة تاييلور نحصل على الحالة الإجهادية المبينة في الشكل (2-1) .  
بافتراض أن محصلة القوى الحجمية المؤثرة على واحدة الحجم من الجسم هي  $\vec{f}$  و أن مركبات هذه المحصلة في اتجاه المحاور الإحداثية  $x^1, x^2, x^3$  هي على التوالي  $\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3$  ، نحصل بكتابة معادلة القوى المؤثرة على متوازي المستطيلات باتجاه المحور  $x^1$  على المعادلة التالية :

$$\begin{aligned}(\sigma^{11} + \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial x^1} dx^1) dx^2 dx^3 + (\sigma^{21} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^2} dx^2) dx^1 dx^3 + \sigma^{31} + \frac{\partial \sigma^{31}}{\partial x^3} dx^3) dx^1 dx^2 \\ - \sigma^{11} dx^2 dx^3 - \sigma^{21} dx^1 dx^3 - \sigma^{31} dx^1 dx^2 - \bar{f}^1 dx^1 dx^2 dx^3 = 0\end{aligned}\quad (2.2 - a')$$

و بالاختصار و القسمة على  $dx^1 dx^2 dx^3$  ينتج :

$$\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{31}}{\partial x^3} + \bar{f}^1 = 0\quad (2.2 - a)$$

و بشكل مماثل نحصل بكتابة معادلة توازن القوى في اتجاه المحورين الآخرين  $x^2, x^3$  على :

$$\frac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial x^3} + \bar{f}^2 = 0\quad (2.2 - b)$$

$$\frac{\partial \sigma^{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial x^3} + \bar{f}^3 = 0\quad (2.2 - c)$$

المعادلات الثلاثة (2.2-c) ، (2.2-b) ، (2.2-a) تأخذ باستخدام طريقة الكتابة بالقرائن الشكل :

$$\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^j} + \bar{f}^i = 0 \quad (2.2)$$

و إذا كتبنا الحد  $\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^j}$  بالشكل  $j, \sigma^j$  (كتابة قرينة الاشتقاق في الأسفل جوهريّة ) نأخذ المعادلة السابقة الشكل :

$$\sigma^j, j + \bar{f}^i = 0 \quad (2.3)$$

إن تطبيق معادلات عزوم القوى حول ثلاثة محاور مارة بمركز ثقل متوازي للمستطيلات و موازية للمحاور  $x^1, x^2, x^3$  على التوالي تعطينا خاصية تناظر الإجهادات الآتية الذكر . و هذه المعادلات هي على التوالي :

$$\begin{aligned} \sigma^{23} &= \sigma^{32} \\ \sigma^{31} &= \sigma^{13} \\ \sigma^{12} &= \sigma^{21} \end{aligned} \quad (2.4)$$

أو

$$\sigma^j = \sigma^j \quad (2.5)$$

و بالتالي تقدم لنا علاقات التوازن ثلاث معادلات فقط من أجل حساب مجاهيل نظرية المرونة الخمسة عشر و تصاغ هذه العلاقات بالشكل :

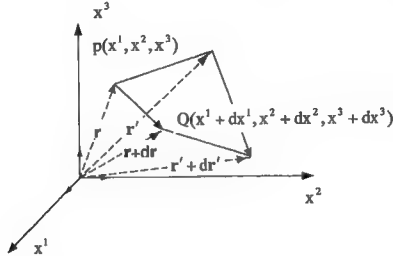
$$\sigma^j, j + \bar{f}^i = 0 \quad (2.6)$$

من الواضح أن معادلات التوازن الثلاثة هذه غير كافية لحساب الإجهادات الستة المجهولة .

## 2-2- علاقات التشوهات - الانتقالات

من المعلوم أنه لتعيين الحالة الانتقالية لجسم متشوه يلزمنا معرفة مركبات الانتقالات في اتجاه المحاور الإحداثية لكل نقطة من نقاط الجسم ، أما وضعية التشوه فيلزمنا لتحديدتها تحديدا تاما معرفة

الانتقالات النسبية بين أي نقطتين متجاورتين تفاضليا حيث يكون البعد بينهما مختلف بمقدار تفاضلي فقط. وهذا يقتضي أن تبقى الارتباطات الداخلية للزرات الجسم مصانة ولا يحدث أي كسر



شكل 2-2 ليف من الجسم قبل وبعد التشوه

بين أجزاء الجسم. لنفرض أن النقطتين  $Q(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$  و  $p(x^1, x^2, x^3)$  متجاورتين تفاضليا و البعد بينهما  $ds$ ، قد انتقلنا بعد وضع التشوه إلى الوضعية الجديدة حيث أصبح البعد بينهما  $ds'$  شكل (2-2)، و لنفرض أن مركبات انتقالات النقطة  $p$  هي  $u^i$  فالشعاع :

$$u = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3 = u^i e_i \quad (2.7)$$

يحدد الوضعية الانتقالية للنقطة  $p$  تماما . سوف نعتبر في البدء مركبات الإجهادات  $u_i$  . شعاع المكان للنقطة  $p$  هو :

$$r = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = x^i e_i \quad (2.8-a)$$

و للنقطة  $p'$  هو :

$$r' = r + u \quad (2.8-b)$$

البعد  $ds$  بين النقطتين  $p$  و  $Q$  هو الجذر التربيعي لتزايد شعاع المكان  $dr$

و يمكن حسابه بأخذ الجذر التربيعي للجداء السلمي :

$$\mathbf{dr} = dx^1 \mathbf{e}_1 + dx^2 \mathbf{e}_2 + dx^3 \mathbf{e}_3 = dx^i \mathbf{e}_i \equiv dx^i \mathbf{e}_j \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} &= dx^1 dx^1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + dx^1 dx^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + dx^1 dx^3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ &+ dx^2 dx^1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + dx^2 dx^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + dx^2 dx^3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &+ dx^3 dx^1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + dx^3 dx^2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + dx^3 dx^3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \\ &= dx^i dx^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (2.10)$$

و ملاحظة العلاقة (1.6) يعبر عن الجداء السلمي السابق بالشكل

$$(ds)^2 = \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} = dx^i dx^j \delta_{ij} \quad (2.11)$$

التباعد بين النقطتين  $p'$  و  $Q'$  يحدده الشعاع  $\mathbf{dr}'$

$$\mathbf{dr}' = \mathbf{dr} + \mathbf{du} \quad (2.12)$$

$\mathbf{du}$  هو التفاضل الكلي للشعاع  $\mathbf{u}$  و يساوي التفاضل الكلي لمركباته:

$$\mathbf{du} = du^1 \mathbf{e}_1 + du^2 \mathbf{e}_2 + du^3 \mathbf{e}_3 = du^i \mathbf{e}_i \quad (2.13)$$

التفاضل الكلي للمركبة الأولى  $du^1$  هو :

$$du^1 = \frac{\partial u^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial u^1}{\partial x^3} dx^3 = \frac{\partial u^1}{\partial x^j} dx^j \quad (2.14)$$

و بشكل مماثل نحصل على التفاضل الكلي للمركبتين الآخرين :

$$du^2 = \frac{\partial u^2}{\partial x^j} dx^j \quad (2.15)$$

$$du^3 = \frac{\partial u^3}{\partial x^j} dx^j$$

و منه يصبح التفاضل الكلي للشعاع  $\mathbf{du}$  :

$$\mathbf{du} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \mathbf{e}_i \quad (2.16)$$

و الشعاع  $\mathbf{dr}'$  يأخذ الشكل :

$$d\mathbf{r}' = dx^i e_i + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j e_i = dx^m e_m + \frac{\partial u_m}{\partial x^n} dx^n e_n \quad (2.17)$$

نشكل الآن الجداء السلمي  $d\mathbf{r}', d\mathbf{r}'$  الذي هو مربع للمسافة بين  $p'$  و  $Q'$  أي :

$$(ds')^2 = d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' = dx^i dx^m \delta_{im} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j dx^m \delta_{im} + \frac{\partial u_m}{\partial x^n} dx^n dx^m \delta_{im} \quad (2.18)$$

نلاحظ أنه في التركيب السابق قد دخلت قرائن متعددة و هي  $m, n, j, i$  وكلها تأخذ القيم 1,2,3 . نحاول الآن إعادة صياغة هذا التركيب بحيث نستخدم قرائن متعاضدة في حدوده . الحلد الأول من هذا التركيب يمكن صياغته بالشكل :

$$dx^i dx^m \delta_{im} = dx^i dx^j \delta_{ij} \quad (2.19)$$

و الحدان الثاني و الثالث تعاد صياغتهما بالإستعانة بالعلاقة (1.17) .

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j dx^m \delta_{im} = \frac{\partial u_m}{\partial x^j} dx^j dx^m = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^i dx^j \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x^n} dx^n dx^m \delta_{im} = \frac{\partial u_i}{\partial x^n} dx^n dx^m = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} dx^i dx^j \quad (2.21)$$

أما الحلد الأخير فيصاغ بالشكل :

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial u_m}{\partial x^n} dx^j dx^n \delta_{im} = \frac{\partial u_m}{\partial x^j} \frac{\partial u^m}{\partial x^n} dx^j dx^n = \frac{\partial u_m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^i} dx^i dx^i \quad (2.22)$$

يمكن التأكد من صحة هذه العلاقات بفك التراكييب السابقة مع مراعاة القرائن المستقلة و القرائن

التي يتم عليها الجمع إضافة إلى ملاحظة أن قرينة الاشتقاق  $\frac{\partial u_i}{\partial x^j}$  تكتب في الأسفل أي بالشكل

$u_{ji}$  . و تصبح العلاقة (2.18) مكافئة للصيغة :

$$(ds')^2 = dx^i dx^j \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^i dx^j + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} dx^i dx^j + \frac{\partial u_m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^i} dx^i dx^i \quad (2.23)$$

إن مربع التطاول الذي حصل بين  $p$  و  $Q$  عند انتقالهما إلى الوضعية الجديدة  $p'$  و  $Q'$  هو :

$$(ds')^2 - (ds)^2 = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^i dx^j + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} dx^i dx^j + \frac{\partial u_m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^i} dx^i dx^i$$

$$= \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j \quad (2.24)$$

نعرف الآن موتر غرين للتشوهات :

$$(ds')^2 - (ds)^2 = 2\varepsilon_{ij} dx^i dx^j \quad (2.25)$$

بالمقارنة بين العلاقتين (2.24) و (2.25) نحصل على موتر التشوهات :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u^m_{,j}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

ينشر هذه العلاقة مع الأخذ بعين الاعتبار أن مركبات الانتقالات المنسوبة إلى جملة القاعدة الأساسية وإلى جملة القاعدة الضدية هي نفسها في حالة الجمل الإحداثية الديكارتية ويظهر الاختلاف فيهما فقط في حالة الإحداثيات المنحنية، نحصل على ست علاقات ( بسبب خاصية التناظر  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  ) والمعروفة بعلاقات التشوهات الانتقالات في حالة السلوك الهندسي غير الخطي.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right); \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

إذا اعتبرنا أن مشتقات الانتقالات صغيرة جدا أو أصغر بكثير من الواحد فيمكن إهمال جداءاتها

مع بعضها البعض

$$\frac{\partial u_m}{\partial x^1} \ll \left( \frac{\partial u_m}{\partial x^1} \frac{\partial u^m}{\partial x^1} \right) \approx 0 \quad (2.28)$$



وتبسط العلاقات السابقة إلى :

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1}; \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x^2}; \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \right); \quad \text{or} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x^3}; \quad \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^3} \right)\end{aligned}\quad (2.29)$$

وهي العلاقات المعروفة في مجال ميكانيك الإنشاءات الخطي (حالة السلوك الهندسي الخطي). وهذه العلاقات هي الأخرى ست معادلات تفاضلية جزئية نستطيع فيها تعيين كافة التشوهات المتجهولة إذا ما علمت مركبات الانتقال الثلاثة .

## 2-3- قانون المادة

قانون المادة هي علاقات تربط بين حالة الإجهادات و حالة التشوهات الحاصلة في جسم ما. وفي مجال ميكانيك الإنشاءات الخطي يفترض أن تكون مادة الإنشاءات قيد الدراسة متجانسة أي أن خواص هذه المادة لا تتغير من نقطة إلى أخرى . كما منفترض أن خواص المادة في نقطة ما واحدة في كل الاتجاهات و لا تتغير بتغير الاتجاه و يقال عندها أن المادة متناحية *isothrope* وسوف نعتبر هنا أيضا أن المادة مرنة . و هذه الخاصية تقتضي بأن تنعدم الإجهادات و التشوهات الناجمة عن حولات ما عند إزالة هذه الحمولات . أسهل افتراض لسلوك المادة هو السلوك الخطي و الذي يعبر عنه بقانون هوك *Hooke* و الشكل العام له هو :

$$\sigma^{ijk} = c^{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.30)$$

حيث  $c^{ijkl}$  هي معاملات المرونة للمادة . عدد هذه المعاملات وفق للعلاقة (2.30) هي 81 معامل باعتبار أن كل قرينة تأخذ القيم 1,2,3 على التوالي . غير أن خاصية تناظر الإجهادات تقتضي بأن تكون للمعاملات  $c^{ijkl}$  مساوية للمعاملات  $c^{jikl}$  و خاصية تناظر التشوهات تقتضي بأن تكون المعاملات  $c^{ijkl}$  مساوية للمعاملات  $c^{jilk}$  و بالتالي يكون عدد المعاملات المستقلة

فقط 36 معاملا. عدد المعادلات التي تعطيها العلاقة (2.30) دون اعتبار التناظر هي تسع معادلات حيث  $\bar{\epsilon}_i, \bar{\gamma}_i$  قرائن مستقلة لا يجري عليها الجمع بينما  $\bar{\epsilon}_{ij}, \bar{\gamma}_{ij}$  قرائن يجري عليها الجمع . و باعتبار خواص التناظر يصبح عدد المعادلات المستقلة ست معادلات فقط . و في حالة المادة المتجانسة المتناحية يأخذ قانون هوك الشكل :

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{23} \\ \sigma^{31} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & 1-2\nu & & \\ & & & & 1-2\nu & \\ & & & & & 1-2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

E معامل المرونة أو معامل يونغ ،  $\nu$  معامل بواسون . هنا يجب الانتباه أن  $\epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}$  الواردة في العلاقة (2.29) هي نصف مثيلاتها  $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$  و المعروفة عادة في الكتب التي تعتمد الطريقة المصفوفية في كتابة علاقات نظرية للمرونة .

علاقات الإجهادات - التشوهات (2.30) هي علاقات قابلة للعكس - و معكوسها يعطي علاقات التشوهات - الإجهادات :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 1+\nu & & \\ & & & & 1+\nu & \\ & & & & & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{23} \\ \sigma^{31} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

و الشكل العام لهذه العلاقات هو :

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma^{kl} \quad (2.33)$$

حيث  $S_{ij,kl}$  هي معاملات المطاوعة للمادة . تساهم علاقات الإجهادات- التشوهات في نظرية المرونة بست معادلات جبرية مستقلة خطياً . في حالة السلوك الفيزيائي غير الخطي تكون معاملات المرونة المعرفة في العلاقة (2.30) تابعة أيضاً لحالة التشوهات .

## 2-4- شروط التوافق

شروط التوافق هي علاقات تربط مشتقات التشوهات ببعضها البعض وهي لا تضيف أي معادلات إضافية تساهم في إيجاد حلول نظرية المرونة . وإنما هي شروط يجب أن تحققها توابع التشوهات و بالتالي أيضاً الانتقالات لكي يتحقق ما يلي :

عند اقتطاع متوازي المستطيلات بأبعاد تفاضلية  $dx^1, dx^2, dx^3$  من جسم يتعرض لتشوهات ما يجب أن يملأ تماماً الفراغ الذي خلفه بعد تشوّهه و تشوّه الجسم الذي اقتطع منه . تعين توابع الانتقالات الثلاثة  $u_i$  الحالة الحركية (الكينماتيكية) للجسم تعيناً تاماً والحالة الحركية تتضمن حالة الانتقالات و حالة التشوهات . المجاهيل الحركية في نظرية المرونة هي تسعة ثلاثة انتقالات وست تشوهات . وحتى تعين توابع الانتقالات الثلاثة الحالة الحركية للتضمنة تسعة مجاهيل تعيناً وحيناً يجب أن تتواجد بين توابع التشوهات الستة المحسوبة من ثلاثة انتقالات (3-6) معادلة مستقلة ، أي ست معادلات مستقلة و هذه المعادلات يمكن الحصول عليها بالشكل التالي :

بافتراض أن القرائن  $g_{ij}, \bar{g}_{ij}, \bar{g}_{ij}, \bar{g}_{ij}$  تتحول على  $x^1, x^2, x^3$  نحصل باشتقاق العلاقات (2.29) مرتين بتركييب مختلفة على :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij,kl} &= \frac{1}{2}(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}) \\ \varepsilon_{kl,ij} &= \frac{1}{2}(u_{k,ijl} + u_{l,ikj}) \\ \varepsilon_{ij,kl} &= \frac{1}{2}(u_{l,ijk} + u_{k,lij}) \\ \varepsilon_{kl,ij} &= \frac{1}{2}(u_{k,ijl} + u_{l,ikj}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

بجمع العلاقة الأولى والثانية ينتج :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl} + u_{k,ijl} + u_{l,kij}) \quad (2.35)$$

و يجمع العلاقة الثالثة و الرابعة نحصل على :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl} + u_{k,ijl} + u_{l,kij}) \quad (2.36)$$

بالمقارنة نجد أن :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} \quad (2.37)$$

العلاقات السابقة تحتوي على 81 معادلة تنتج من إعطاء القرائن  $i, j, k, l$  التباديل  $x^1, x^2, x^3$  وست منها فقط معادلات مستقلة خطياً و المعادلات البقية إما معادلات تافهة غير ذي أهمية أو معادلات تنتج من المعادلات الستة المستقلة بتركيب خطية ، و العلاقات الستة المستقلة خطياً هي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{(\partial x^1)^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{(\partial x^2)^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x^2 \partial x^3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{(\partial x^1)^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x^1 \partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^1 \partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

لنعتبر أن جسماً ما يشكل وسطاً مستمراً يتعرض لحمولات خارجية . يتشوه هذا الوسط تحت تأثير الحمولات الخارجية و يغير شكله . إذا لم يحدث كسر في هذا الجسم نتيجة تطبيق الحمولات يبقى الجسم مشكلاً وسطاً مستمراً . لتصور الآن أن هذا الجسم مقسم إلى عدد لا نهائي من متوازيات المستطيلات ذات الأبعاد التفاضلية . بنتيجة تشوه الجسم تشوهه أيضاً متوازيات المستطيلات هذه ، لإعادة تشكيل الجسم يجب تجميع متوازيات المستطيلات هذه بعد تشوهها . و

المعادلات (2.38) تضمن إعادة هذا التجميع بشكل يقى الجسم فيه كوسط مستمر . يستفاد أحيانا من معادلات شروط التوافق في تشكيل المعادلة التفاضلية العامة لنظرية المرونة بدلالة الإجهادات .

## 2-5- المعادلات التفاضلية العامة لنظرية المرونة :

بإيجاز ما سبق يتضح أنه لإيجاد المجاهيل الكينماتيكية (انتقالات و تشوهات) و المجاهيل المستاتيكية (الإجهادات) الخمسة عشر لنظرية للمرونة . لدينا للمعادلات التالية:

3- معادلات توازن و هي معادلات تفاضلية جزئية .

6- معادلات تربط التشوهات بالانتقالات و هي أيضا معادلات تفاضلية جزئية .

6- معادلات تربط الإجهادات بالتشوهات و هي معادلات جوية .

هناك إمكانيات عدة لصياغة المعادلات التفاضلية العامة لنظرية المرونة و هذه الإمكانيات تنضوي تحت ثلاث حالات .

الحالة الأولى : صياغة المعادلات التفاضلية العامة بدلالة الانتقالات فقط . إذ يمكن تعويض علاقات التشوهات - الانتقالات في علاقات الإجهادات - التشوهات فنحصل على علاقات تربط بين الإجهادات و الانتقالات و تعوض العلاقات الأخيرة الناتجة في معادلات التوازن فنحصل على المعادلات التفاضلية العامة بدلالة الانتقالات . يعتمد عادة أثناء إجراءات هذه الصياغة إلى إدخال فرضيات تسهيلية حسب الحالة التي نعالجها ( إطارات ، شرائح ، بلاطات ، . . . ) ، إذ يستعاض عادة عن الانتقالات في كل نقطة من المقطع بالانتقالات مثلا في مركز ثقل المقطع و الدورانات مثلا حول المحاور الرئيسية للمارة بمركز ثقل المقطع . كمثال على هذه الفرضيات التسهيلية فرضية برنولي BERNOLLI ، فرضية تيموشنكو TIMOSHONKO ، فرضيات فلاسوف VLASOV . كما يستعاض عن الإجهادات في المقطع بتكاملها على المقطع المحتر بعد إدخال فرضيات تسهيلية أيضا لتوزع الإجهادات (فرضية التوزع المنتظم للإجهادات قتل سانت فينانت (ST.VENANT)) ، و نتيجة هذه التكاملات تمثل قوى المقطع . إذا أجريت مثل هذه

الفرضيات التسهيلية نحصل عوضاً عن علاقات الإجهادات - الانتقالات على علاقات تربط بين قوى المقطع وبين الانتقالات والدورانات في نقاط مميزة وحول محاور مميزة للمقطع (علاقات قوى المقطع - الانتقالات) . تطبق بعدها علاقات التوازن على قوى المقطع وتعوض علاقات قوى المقطع - الانتقالات في معادلات التوازن الناتجة فنحصل على المعادلة العامة للمسألة موضوع البحث . تتميز المعادلة التفاضلية العامة للحالة الأولى بأنها تحتوي على عدد أقل من الجاهيل (ثلاثة انتقالات) ولكن هذا العدد القليل من الجاهيل مقترن بارتفاع مرتبة المعادلات التفاضلية بالنسبة للحالات الأخرى. ويتم استخدام هذه الحالة عندما تعرض شروط طرفية مسبقة للانتقالات على السطح الخارجي للجسم موضوع البحث.

**الحالة الثانية :** صياغة المعادلات التفاضلية العامة بدلالة الإجهادات فقط . يتم صياغة المعادلات التفاضلية بدلالة الإجهادات باستخدام علاقات التوازن وشروط التوافق . و هي في الحالة العامة معادلات معقدة . إلا أن صياغتها لمادة مرنة متناحية سهلة . تستخدم مثل هذه الصياغة عند وجود شروط طرفية مفترضة مسبقاً للإجهادات يجب تحقيقها على السطح الخارجي للجسم موضوع الدراسة . درجة المعادلات التفاضلية هذه هي أخفض منها للحالة الأولى و هذه مميزة مناسبة لكنها مقترنة أحياناً بصعوبات وذلك إذا أردنا حساب الانتقالات لأن حسابها يجري عن طريق التكامل . يلجأ عادة في مثل هذه الحالة لإدخال ما يسمى بتوابع الإجهادات وقد أدخلها الرياضي الإنكليزي المعروف AIRY . فإذا ما حققت هذه التوابع معادلات التوازن (وهذا ما افترضه AIRY) فإن صياغة المعادلة التفاضلية تصبح أبسط و قريبة من شكلها في الحالة الأولى و بذلك تزداد مرتبة المعادلة التفاضلية .

**الحالة الثالثة :** صياغة المعادلات التفاضلية العامة بدلالة الانتقالات والإجهادات معاً . تستخدم هذه الحالة عند وجود شروط طرفية مفترضة مسبقاً للإجهادات و شروط طرفية مفترضة مسبقاً للانتقالات والمعادلات التفاضلية العامة تبقى على شكل مجموعتين من المعادلات التفاضلية الجزئية . المجموعة الأولى و تأخذ شكل معادلات التوازن المكتوبة بدلالة الإجهادات . و المجموعة الثانية هي علاقة الإجهادات بمشتقات الانتقالات . و نحصل عليها بتعويض علاقات التشوهات - الانتقالات في قانون المادة (أو علاقات الإجهادات - التشوهات) .

## 2-6- الشروط الطرفية :

يتطلب إيجاد الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية إعطاء شروط طرفية مسبقة كافية لتحديد ثوابت الحلول العامة . و الشروط الطرفية المسبقة هي في حالتنا هذه شروط معطاة على السطح الخلوحي للجسم موضوع الدراسة . و هي إما انتقالات معلومة على السطح الخارجي أو قوى معلومة ( أو إجهادات ) مطبقة على هذا السطح . تمثل الانتقالات للمعلومة على جزء السطح الخارجي الشروط الطرفية الهندسية و القوى المعلومة على جزء السطح الخارجي الشروط الطرفية الميكانيكية و فيمايلي سنعر بالمعادلات الرياضية عن هذه الشروط .

### 2-6-1- الشروط الطرفية الهندسية :

لنرمز لجزء السطح الخارجي للجسم الذي تكون فيه الانتقالات معلومة  $s_0$  ، و للانتقالات المعلومة على جزء هذا السطح  $\bar{u}_i$  . فإذا كانت توابع الانتقالات  $u_i$  تمثل حلا للمعادلات التفاضلية فهذه التوابع يجب أن تحقق الشروط الطرفية للانتقالات أي أنها سوف تتطابق مع الانتقالات المعلومة  $\bar{u}_i$  على جزء السطح الخارجي و يعبر عن هذا التطابق بالمعادلة :

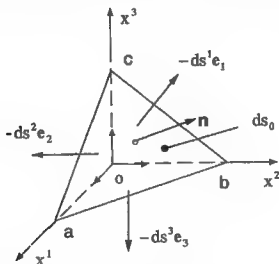
$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } s_0 \quad (2.39)$$

### 2-6-2- الشروط الطرفية الميكانيكية :

نرمز لجزء السطح الخارجي الذي تكون عليه القوى و بالتالي الإجهادات معلومة  $s_0$  و هو يساوي إلى السطح الخارجي الكلي  $s$  منقوصا منه جزء السطح  $s_0$  .

لنقتطع من السطح الخارجي هراً  $oabc$  أبعاده تفاضلية شكل (2-3) ، وجوهه الثلاثة  $oca, obc, oab$  و التي مساحتها  $ds_1, ds_2, ds_3$  واقعة في المستويات  $x^1x^2, x^2x^3, x^1x^3$

على التوالي والوجه الرابع abc يمثل جزءاً تفاضلياً من السطح  $s_0$  . نوجه نواظم هذه السطوح وفق قاعدة اليد اليمنى . وفق هذه القاعدة يكون ناظم السطح oab الموجب متجهاً



شكل 2-3 : هرم مقتطع من السطح الخارجي

باتجاه المحور  $x^3$  ، و هو اتجاه إمام اليد اليمنى ، إذا دار oa وفق أصابع اليد اليمنى ليتطابق مع ob . وهكذا يمكن استنتاج اتجاه الناظم الموجب لبقية السطوح . الحالة الإجهادية على السطوح oca, obc, oab متطابقة مع تلك التي في الشكل (1-2) أما على السطح abc ذي للمساحة  $ds_0$  فتؤثر القوة المعطاة  $\bar{T}ds_0$  والمعلومة مسبقاً ، ومركباً على المحاور الإحداثية:  $\bar{T}ds_0 = \bar{T}^i ds_0 e_i$  حيث  $\bar{T}$  هو الإجهاد الكلي على وحدة السطح ،  $\bar{T}^i$  مركبات هذا الإجهاد في اتجاه المحاور الإحداثية . على الوجه oab تؤثر القوة:

$$\sigma^{31}ds_3e_1 + \sigma^{32}ds_3e_2 + \sigma^{33}ds_3e_3$$

و على الوجه obc القوة :

$$\sigma^{11}ds_1e_1 + \sigma^{12}ds_1e_2 + \sigma^{13}ds_1e_3$$

و على الوجه oac القوة:

$$\sigma^{12}ds_2e_1 + \sigma^{22}ds_2e_2 + \sigma^{23}ds_2e_3$$



و مجموع هذه القوى المؤثرة يمكن التعبير عنه بالكتابة بالقرائن بالشكل :  $\sigma^j ds_j e_j$   
معادلات توازن هذه القوى تقتضي أن يكون :

$$-\sigma^j ds_j e_j + \bar{T}^i ds_0 e_i = 0 \quad (2.41)$$

و مقارنة المركبات مع بعضها البعض نجد أن :

$$\sigma^j ds_j = \bar{T}^i ds_0 \quad (2.42)$$

أو

$$\sigma^j \frac{ds_j}{ds_0} = \bar{T}^i \quad (2.43)$$

ولكن مركبات شعاع النظم على السطح abc على المحاور الإحداثية  $x^1, x^2, x^3$  هي على التوالي :

$$n_1 = \frac{ds_1}{ds_0}; n_2 = \frac{ds_2}{ds_0}; n_3 = \frac{ds_3}{ds_0} \quad (2.44)$$

أو باستخدام كتابة القرائن :

$$n_j = \frac{ds_j}{ds_0} \quad (2.45)$$

وحتما يعبر عن الشروط الطرفية الميكانيكية بالمعادلة :

$$\sigma^j n_j = \bar{T}^i; \text{ on } s_0 \quad (2.46)$$

## 2-7- ملاحظات حول قابلية الحل

برهن كيرشهوف KIRCHHOFF أنه في المجال الخطي لنظرية المرونة يوجد حل وحيد للمعادلات الستاتيكية و الكينماتيكية ( الحركية ). وهذا لا يعني أنه بإمكاننا إيجاد هذا الحل تحليليا . هناك حلول تحليلية وأغلبها لحالات هندسية بسيطة حتى أن هناك في المجال غير الخطي حلول وحيدة لبعض حالات التحميل البسيطة مع الأشكال الهندسية البسيطة للمنشآت . هناك أمثلة على عدم وحدانية الحل في الحالات غير الخطية : عند دراسة الاستقرار في المنشآت يحدث أحيانا في

حالة التوازن الحرج أن تزداد الانتقالات دون زيادة ملموسة في الحمل الذي أدى إلى هذه الحالة و ذلك عندما يصل مقدار الحمل إلى الحمل الحرج. وهذا يعني أنه يقابل لحالة تحميل معينة أكثر من وضعية انتقالية . في حالة السلوك اللرن المثالي - اللدن المثالي للمادة يمكن أن يصبح المنشأ مستقرا عند حمل معين ، و عند زيادة هذا الحمل يبقى الاستقرار قائما. وهذا يعني أنه لا نستطيع تحديد حالة إجهادات معينة مقابلة لحالة التشوهات الناشئة . في الحالة العامة لمعادلات نظرية المرونة في المجال الخطي لا نستطيع عادة إيجاد حلول المعادلات التفاضلية الجزئية و الجبرية بشكل تحليلي . و لذلك يلجأ إلى استخدام الطرق العددية . و من الطرق الهامة التي استخدمت في هذا المضمار طريقة العناصر المنتهية التي لاقت رواجاً واسعاً منذ بداية الستينات من هذا القرن ، و اقترن استخدام هذه الطريقة باستخدام طرق الطاقة كمتاير أو ضوابط لمقدار صحة الحلول التي حصل عليها و سيتم في الفصل الثالث شرح مبادئ الطاقة الأساسية للحالة العامة و التي بنيت عليها طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات و طريقة العناصر المنتهية - نموذج الإجهادات .

## 2-8- المصادر العلمية

1. Washizu, K  
Variational Methods in Elasticity and Plasticity  
Oxford : Pergamon Press , 1987.
2. Zienkiewicz , O . C .  
Methode der Finiten Elemente  
VEB Fachbuchverlag , Leipzig 1987.
- 3- Goeldner , H .  
Lehruch Hohere Festigkeitslehre , Band 1 und 2  
VEB Fachbuchverlag , Leipzig 1984.
- 4- Goeldner, H .  
Arbeitsbuch Hohere Festigkeitslehre  
VEB Fachbuchverlag , Leipzig 1981.

### 3- مبادئ الطاقة الأساسية و الموسعة

قبل البدء بقراءة هذا الفصل يجب دراسة الفقرات المتعلقة بقواعد حساب المتغيرات بعناية فائقة و ذلك من أجل الفهم المتكامل للاشتقاقات التي سترد أثناء دراسة هذا الفصل. يقصد بمبادئ الطاقة الأساسية تلك التي يمكن اشتقاقها مباشرة من معادلات نظرية اللرونة دون الاعتماد على مبادئ أخرى كنقطة انطلاق . ومبادئ الطاقة الموسعة تلك التي تتخذ مبدأً أساسياً كنقطة انطلاق لهذا وتستلزم مضارب لاغرنج لتحرير المبادئ الأساسية من بعض الشروط الواجب تحقيقها و ذلك تلافياً للمصاعب التي قد تولدها مثل هذه الشروط . هناك مبدآن أساسيان للطاقة في مجال ميكانيكا الإنشاءات الخطي، مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري وهو يشكل القاعدة النظرية والمعياري الأساسي لطريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات، ومبدأ الطاقة المتتمة الأصغري و هو يشكل المعيار الأساسي لطريقة العناصر المنتهية - نموذج الإجهادات. في الطريقة الأولى تمثل الانتقالات المتغيرات العشوائية التي يتم افتراضها وفق نواظم و ضوابط معينة تتعلق بالمسألة المطروحة بينما تكون في الطريقة الثانية الإجهادات هي المتغيرات العشوائية. سوف نرى أن الانتقالات أو الإجهادات العشوائية التي يمكن اختيارها للتعبير عن الحالة الانتقالية أو الإجهادية يجب أن تحقق شروط طرفية يصعب تحقيقها عادة". لذلك تستخدم مضارب لاغرنج للاستغناء عن الشروط الطرفية وإعطاء حرية أكثر في اختيار المتغيرات العشوائية. فباستخدام مضارب لاغرنج يمكن تعديل مبادئ الطاقة الأساسية للحصول على مبادئ طاقة موسعة. فمثلاً يمكن تعديل مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري للحصول على مبدأ الطاقة الكامنة المعدل الذي يختلف عن سابقه بإمكانية اختيار توابع عشوائية للإجهادات على سطح الوسط للدروس، إضافة لاختيار توابع الانتقالات ضمن الوسط. المبدأ الأخير يمكن تعديله أيضاً للحصول على مبدأ الطاقة المعمم . والأخير يمكن تعديله أيضاً للحصول على مبدأ هيلنغر- رايسنر Hellinger-Reissner . كذلك يمكن تعديل مبدأ الطاقة المتتمة الأصغري للحصول على مبدأ الطاقة المتتمة المعدل ونستطيع اعتماداً على الأخير اختيار توابع للانتقالات على السطح الخارجي للوسط للدروس إضافة لإمكانية اختيار توابع الإجهادات ضمن الوسط للدروس . مبادئ الطاقة المعلقة تشكل أسس طرق العناصر

المنتهية للنموذج المختلط و النموذج المجهين. وسوف نتخذ مبدأ الطاقة المتضمنة المعدل كمثال على مبادئ الطاقة المعدلة لانتشاره الواسع إضافة لكونه نموذج مناسب في معالجة بعض الأوساط الإنشائية للعقدة طوبولوجياً و التي تتميز بتلاقي سطوحها وفق خطوط منكسرة كالمشعات المثنية المستوية (foalded Structures) (المكونة من بلاطات و شرائح متصلة ببعضها البعض و فسق خطوط منكسرة). بالطبع لم نذكر كل مبادئ الطاقة المعدلة التي يمكن اشتقاقها و يمكن للقارئ المختص الرجوع إلى المراجع المذكورة في نهاية الفصل .

### 1-3- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

#### 1-1-3- العمل الداخلي الكامن لقوى التشوه

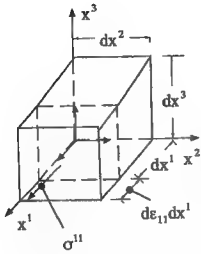
لنأخذ متوازي مستطيلات بأبعاد تفاضلية مقطوعاً من جسم ما و لنفترض تزايداً للتشوهات باتجاه المحور  $x^1$  بالمقدار  $de_{11} = d(\frac{\partial u_1}{\partial x^1})$  و تزايداً للتشوهات القاسية في المستوى  $x^1 x^2$  بمقدار  $2de_{21}$  و هو المقدار  $d(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2})$ . تؤثر الإجهادات الناعمة  $\sigma^{11}$  على السطح الذي مساحته  $dx^2 dx^3$  و محصلة هذه الإجهادات هي القوة  $\sigma^{11} dx^2 dx^3 e_1$  والمثلة بشعاع يتجه باتجاه المحور  $x^1$  . و مقدار الانتقال الحاصل و الناتج عن تزايد التشوه الناعمة بالمقدار  $de_{11}$  يمكن التعبير عنه بشعاع الانتقال  $de_{11} dx^1 e_1$  ، و العمل الداخلي المنجز هو الجداء السلمي لشعاع القوة و شعاع الانتقال أي :

$$\sigma^{11} dx^2 dx^3 e_1 dx^1 d(\frac{\partial u_1}{\partial x^1}) e_1$$

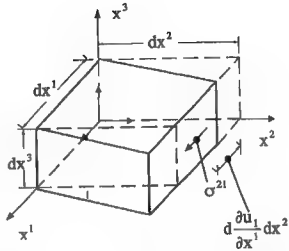
و هو مساو للمقدار :

$$\sigma^{11} de_{11} dV$$

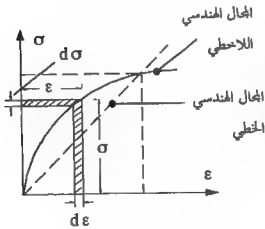
حيث  $dV$  حجم متوازي المستطيلات بأبعاده التفاضلية . والجداء السلمي للشعاعين  $e_1$  و  $e_1$  مساو للواحد و يشكل ممائل ينتج العمل الذي تنجزه قوى التشوه من تزايد التشوه الناعمة  $de_{33}$  و  $de_{22}$  و هو على التوالي :  $\sigma^{33} de_{33} dV, \sigma^{22} de_{22} dV$  . بالنسبة لعمل القوى القاسية نجد



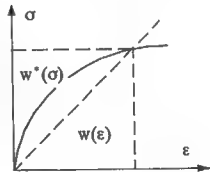
(a) التشوه الناطقي لتوازي مستطيلات  
بأبعاد تفاضلية باتجاه  $x^1$



(b) التشوه المماسي لتوازي مستطيلات  
بأبعاد تفاضلية في المستوى  $x^1 x^2$



(c) كثافة طاقة التشوه الكامنة  
وكثافة الطاقة للتممة



(d) الطاقة الكامنة  $w(\epsilon)$  و الطاقة  
التممة  $w^*(\sigma)$  لعنصر حجمي  $dV$

شكل 3-1- العمل الداخلي لقوى التشوه

أن جزء تزايد التشوهات القاسية  $d(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2})$  الذي يؤدي إلى انتقال في اتجاه الإجهادات  $\sigma^{21}$  هو المقدار  $d \frac{\partial u_1}{\partial x^2}$  شكل (3-1-b). و باعتبار أن التشوه صغير جدا فإن تغير زاوية القص مساو لقوس الزاوية نفسها و طول القوس هو  $(d \frac{\partial u_1}{\partial x^2})dx^2$  و بالتالي يكون شعاع الانتقال في اتجاه  $\sigma^{21}$  مساو للمقدار  $(d \frac{\partial u_1}{\partial x^2})dx^2 e_1$  ، تؤثر الإجهادات  $\sigma^{21}$  على المستوي ذي للساحة  $dx^3 dx^1 e_1$  و شعاع القوة المحصلة لهذه الإجهادات هو :  $\sigma^{21} dx^3 dx^1 e_1$  و بالتالي يصبح العمل الداخلي المنجز مساو إلى :  $\sigma^{21} (d \frac{\partial u_1}{\partial x^2}) dx^2 dx^3 dx^1 e_1 \cdot e_1$  أو  $\sigma^{21} du_{1,2} dV$  . بشكل مماثل نجد أن هذا العمل لمركبات الإجهادات المماسية المتبقية  $\sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{32}$  هو على التوالي :  $\sigma^{12} du_{2,1} dV$  ،  $\sigma^{13} du_{3,1} dV$  ،  $\sigma^{23} du_{3,2} dV$  ،  $\sigma^{31} du_{1,3} dV$  ،  $\sigma^{32} du_{2,3} dV$  ، و عمل القوى المماسية على التفاضل الحجمي  $dV$  يصبح :

$$\sigma^{12} du_{2,1} dV + \sigma^{21} du_{1,2} dV + \sigma^{13} du_{3,1} dV + \sigma^{31} du_{1,3} dV + \sigma^{23} du_{3,2} dV + \sigma^{32} du_{2,3} dV$$

و هو مساو إلى :

$\sigma^{12} d\epsilon_{12} dV + \sigma^{21} d\epsilon_{21} dV + \sigma^{13} d\epsilon_{13} dV + \sigma^{31} d\epsilon_{31} dV + \sigma^{23} d\epsilon_{23} dV + \sigma^{32} d\epsilon_{32} dV$   
 يمكن التأكد من ذلك بتبديل التشوهات المماسية بقيمتها من العلاقات (2.27) . و عند تزايد التشوهات من القيمة 0 و حتى القيمة النهائية  $\epsilon$  يصبح العمل الداخلي لمجموع القوى الناعظمية و المماسية و يرمز له بالرمز  $dW(\epsilon)$  على التفاضل الحجمي  $dV$  كمايلي:

$$dW(\epsilon) = \left( \int_0^{\epsilon_{11}} \sigma^{11} d\epsilon_{11} + \int_0^{\epsilon_{12}} \sigma^{12} d\epsilon_{12} + \int_0^{\epsilon_{13}} \sigma^{13} d\epsilon_{13} + \int_0^{\epsilon_{21}} \sigma^{21} d\epsilon_{21} + \int_0^{\epsilon_{22}} \sigma^{22} d\epsilon_{22} + \int_0^{\epsilon_{23}} \sigma^{23} d\epsilon_{23} \right. \\ \left. + \int_0^{\epsilon_{31}} \sigma^{31} d\epsilon_{31} + \int_0^{\epsilon_{32}} \sigma^{32} d\epsilon_{32} + \int_0^{\epsilon_{33}} \sigma^{33} d\epsilon_{33} \right) dV = \int_0^{\epsilon} \sigma^q d\epsilon_q dV \quad (3.1)$$

يسمى تغير هذا المقدار بالنسبة لواحدة الحجم من الجسم بكثافة الطاقة الكامنة للجسم .

$$w(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} \quad (3.2)$$

و التفاضل التام لهذا المقدار هو :

$$dw(\epsilon) = \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} \quad (3.3)$$

في حالة الأجسام المرنة يكون التابع  $w(\epsilon)$  متعلقا فقط بحالة التشوهات ، بغض النظر عن كيفية حصول هذه التشوهات . ومخطط الإجهادات - التشوهات يتبع نفس المنحني عند التحميل و عند إزالة هذا التحميل . و التفاضل التام للتابع  $w(\epsilon)$  هو :

$$dw(\epsilon) = \frac{\partial w(\epsilon)}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} \quad (3.4)$$

بمقارنة (3.3) مع (3.4) ينتج :

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial w(\epsilon)}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.5)$$

حتى الآن حسب العمل الداخلي الناتج عن تغير حالة التشوهات بالنسبة لعنصر حجمي تفاضلي  $dV$  . لحساب العمل الكلي الناتج على كامل الجسم يجب إجراء تكامل العلاقة (3.1) على كامل حجم الجسم .

$$W(\epsilon) = \int_V w(\epsilon) dV = \int_V \left( \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} \right) dV \quad (3.6)$$

وهذا التعبير يمثل العمل الداخلي الكامن لقوى التشوه و هو يساوي الطاقة المخزنة في الجسم أو ما يسمى طاقة التشوه الداخلي .

### 3-1-2- عمل القوى الخارجية

ليكن لدينا جسما ما يخضع بالإضافة إلى محصلة القوى الحجمية  $\bar{f}$  المؤثرة على واحدة الحجم من الجسم  $dV$  إلى قوى خارجية  $\bar{T}$  تؤثر على وحدة السطح  $ds$  من جزء السطح الذي تكسونه

فيه القوى مفترضة  $s_0$  . لنفرض تزايداً في تابع الانتقالات  $u^i(x^1, x^2, x^3)$  الذي يصف الحالة الانتقالية للجسم مقداره التفاضل التام لهذا التابع . في هذه الحالة تنحز هذه القوى العمل التالي :

$$\begin{aligned} dW(V) &= \int_V \bar{f}^i e_i du^j e_j dV + \int_{s_0} \bar{T}^i e_i du^j e_j ds \\ &= \int_V \bar{f}^i du^j \delta_{ij} dV + \int_{s_0} \bar{T}^i du^j \delta_{ij} ds \\ &= \int_V \bar{f}^i du_i dV + \int_{s_0} \bar{T}^i du_i ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

و ذلك لأن القوى المجهولة  $T^i$  المؤثرة على جزء السطح الذي تكون فيه الانتقالات مفترضة  $s_0$  لا تؤدي عملاً باعتبار أن التفاضل التام للانتقالات على هذا السطح مساو للصفر (تفاضل قيمة معلومة ثابتة) . فإذا افترضنا أن جملة القوى الخارجية المطبقة على الجسم هي جملة محافظة أي أن القوى الخارجية لا تغير شدتها ولا اتجاهها أثناء هذا الانتقال فإن العمل المنحز عند تفسير الحالة الانتقالية من الوضع البدائي  $u_i(a)$  إلى الوضع النهائي  $u_i(b)$  يصبح :

$$\begin{aligned} W(u) &= \int_{u_i(a)}^{u_i(b)} dw(u) = \int_V \bar{f}^i dV \int_{u_i(a)}^{u_i(b)} du_i + \int_{s_0} \bar{T}^i ds \int_{u_i(a)}^{u_i(b)} du_i \\ &= \int_V \bar{f}^i [u_{i(b)} - u_{i(a)}] dV + \int_{s_0} \bar{T}^i [u_{i(b)} - u_{i(a)}] ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

تمكنا هنا من فصل التكاملين الحجمي والمنحني أو بالأحرى إخراج القوى خارج إشارة التكامل المنحني لعدم تعلق هذه الأخيرة بالطريق المسلوك . والعلاقة (3.8) تعني أيضاً أن العمل الخارجي لا يتعلق بالمنحني الذي حصل عليه الانتقال أو طريق الانتقالات المسلوك وإنما فقط بوضيعتي الانتقالات البدائية والنهائية.

### 3-1-3- ملخص معادلات نظرية المرونة في المجال الخطي و الشروط الطرفية

نلخص الآن معادلات نظرية المرونة في المجال الخطي لتسهيل الرؤيا الواضحة لما سنقوم به من اشتقاقات لاحقة . معادلات نظرية المرونة هي كما وردت في الفصل الأول:



(1) معادلات التوازن :

$$\sigma_{ij}^k + \bar{f}^i = 0 \quad (3.9)$$

(2) علاقات التشوهات - الانتقالات :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.10)$$

(3) قانون المادة :

$$\varepsilon_{ij}^k = c^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.11)$$

(4) الشروط الطرفية الهندسية :

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad s_u \quad (3.12)$$

(5) الشروط الطرفية الميكانيكية :

$$\sigma_{ij}^k n_j - \bar{T}^i = 0 \quad \text{on} \quad s_\sigma \quad (3.13)$$

أو

$$T^i - \bar{T}^i = 0; T^i = \sigma_{ij}^k n_j \quad \text{on} \quad s_\sigma \quad (3.14)$$

المعادلات السابقة تمثل ملخصا لما ورد في الفصل الأول . و هنا نود التلميح إلى الشروط الطرفية .  
فالتابع  $u_i$  على  $s_u$  و  $T^i$  على  $s_\sigma$  هي توابع مشتقة من التتابع  $u_i$  ،  $\sigma^k$  على التوالي التي  
تصف الحالة الانتقالية و الإجهادية على الجسم . أما  $\bar{u}_i$  و  $\bar{T}^i$  فهي قيم معلومة مسبقا و  
لذلك ميزت بالإشارة -

### 3-1-4 اشتقاق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

لنفترض أن جسما ما يشكل وسطا مستمرا موجود في حالة توازن . أي أن معادلات التوازن  
الداخلية لتوازي مستطيلات بأبعاد تفاضلية مقطوع من الجسم ( المعادلات (3.9) ) محققة  
بالإضافة إلى تحقق توازن الجسم تحت تأثير القوى الخارجية  $\bar{T}^i$  المؤثرة على جزء السطح  
الخارجي و بتعبير آخر يفترض أن الشروط الطرفية الميكانيكية (3.14) محققة . و لنفرض أيضا أن  
الجسم يخضع لشروط طرفية هندسية على جزء السطح الخارجي  $s_u$  ممثلة بالمعادلات (3.12) .

لنعطي هذا الجسم انتقالاً وهمياً مقداره المتغير الأول لتتابع الانتقالات الحقيقية  $(x^1, x^2, x^3)$  دون للسما بشرطه الطرفية الهندسية عندها يكون :

$$\int_V (\sigma^{\#}_{,j} + \bar{f}^i) \delta u_i dV + \int_{S_0} (T^i - \bar{T}^i) \delta u_i ds = 0 \quad (3.15)$$

في العلاقة (3.15) خفضت قرانن توابع الانتقالات  $\delta u_i$  لتصبح  $\delta u_i$  بعد مراعاة كون العمل الداخلي و العمل الخارجي هو الجداء السلمي لأشعة القوى و أشعة الانتقالات كما ورد توضيحها في الفقرتين 1-3 و 2-3 ، و الإشارة السالبة في الحد الأول تدل على أن اتجاه تزايد القوى الداخلية دوماً معاكس لاتجاه تزايد الانتقالات . إن الانتقال الرياضي من المعادلتين (3.9) و (3.14) إلى المعادلة (3.15) يعني إنشائياً الاستغناء عن تحقق معادلات التوازن الداخلية على متوازي المستطيلات بأبعاد تفاضلية و استبدالها بتحقيق معادلات التوازن على كامل حجم الجسم . كما يعني بشكل مماثل الاستغناء عن تحقق الشروط الطرفية الميكانيكية على هرم بأبعاد تفاضلية مقطوع من السطح الخارجي  $S_0$  و استبدالها بتحقيق الشروط الطرفية الميكانيكية على كامل السطح  $S_0$  . لندخل الآن بعض التحويلات الرياضية على المعادلة (3.15) بغية تفسير مكنوناتها إنشائياً . يمكن كتابة مشتق جداء مضارب بالشكل :

$$-\int_V (\sigma^{\#} \delta u_{i,j})_{,j} dV = -\int_V \sigma^{\#}_{,j} \delta u_{i,j} dV - \int_V \sigma^{\#} \delta u_{i,j,j} dV \quad (3.16)$$

الحد اليساري من المعادلة السابقة هو تكامل على حجم الجسم  $V$  لتفرق المقدار  $\sigma^{\#} \delta u_{i,j}$  و يمكن تحويله إلى تكامل على سطح الجسم الخارجي الكلي  $S$  ;  $(s = s_0 + s_u)$  وفق مقولة غاوس (Gauss) في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي :

$$-\int_V (\sigma^{\#} \delta u_{i,j})_{,j} dV = -\int_S \sigma^{\#} n_j \delta u_{i,j} dS \quad (3.17)$$

بتعويض المعادلة (3.17) في المعادلة (3.16) و إعادة ترتيب الحدود الأخيرة نحصل على :

$$\begin{aligned} -\int_V \sigma^{\#}_{,j} \delta u_{i,j} dV &= \int_V \sigma^{\#} \delta u_{i,j,j} dV - \int_S \sigma^{\#} n_j \delta u_{i,j} dS \\ &= \int_V \sigma^{\#}_{,j} \delta u_{i,j} dV - \int_{S_0} \sigma^{\#} n_j \delta u_{i,j} dS - \int_{S_u} \sigma^{\#} n_j \delta u_{i,j} dS \end{aligned} \quad (3.18)$$

هنا تم تقسيم التكامل السطحي على  $S$  إلى تكاملين سطحيين على أجزاء السطح  $S_0, S_u$  . لنعيد الآن صياغة المعادلة (3.15) بمساعدة المعادلة (3.18) فنحصل على ما يلي :

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij}^0 \delta u_{i,j} dV - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{S_0} \bar{T}^i \delta u_i ds \\ - \int_{S_0} (\sigma_{ij}^0 n_j - T^i) \delta u_i ds - \int_{S_u} \sigma_{ij}^0 n_j \delta u_i ds = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

المقدار  $\sigma_{ij}^0 n_j$  هو نفسه  $T^i$  ( انظر العلاقة (3.14) ) و هو الإجهاد على وحدة السطح الخارجي الناشئ من تعويض معادلات سطح الجسم في توازن الإجهادات الداخلية و الحد قبل الأخير مساو بالتالي للصفر . الحد الأخير مساو للصفر باعتبار أننا اشتربنا تحقق الشروط الطرفية الهندسية إذ أن متغير مقدار معلوم مكانه للصفر .

$$u_i = \bar{u}_i; \delta u_i = \delta \bar{u}_i = 0 \quad \text{on} \quad S_u \quad (3.20)$$

أما المقدار  $\delta u_{i,j}$  في الحد الأول فهو مكافئ لتغير التشوهات  $\delta \epsilon_{ij}$  مع مراعاة خاصية التناظر لموترة التشوهات .

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = \delta u_{i,j} \quad (3.21)$$

بعد هذه الاعتبارات تصبح العلاقة (3.19) مكافئة للتالي :

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{S_0} \bar{T}^i \delta u_i ds = 0 \quad (3.22)$$

بتفحص العلاقة (3.22) نجد أن الحد الأول منها يمثل العمل الداخلي الكامن لقوى التشوه و أن الحدين الآخرين يمثلان عمل القوى الخارجية . و العلاقة (3.22) ككل تمثل مبدأ هامسا من مبادئ ميكانيك الإنشاءات و هو مبدأ الانتقالات الوهمية . ينص هذا المبدأ على أن مجموع العمل الداخلي الكامن لقوى التشوه و العمل الخارجي للقوى المؤثرة على جسم مستمر يجري انتقالا وهما دون المساس بالشروط الطرفية الهندسية مساو للصفر شرط أن يكون الجسم معزولا ( أي دون إضافة طاقة خارجية ) و أن تكون القوى المؤثرة على الجسم محافظة ( أي لا تغير شدتها أو اتجاهها أثناء الانتقال الوهمي ) . هذا المبدأ ساري المفعول سواء في المجال الفيزيائي الخطي بالإضافة إلى المجال الهندسي الخطي و غير الخطي لأننا حتى الآن لم نضع أية شروط يجب تحقيقها أثناء الاشتقاق و التي تحدّد مجال الاستخدام . لنقصر الآن بحثنا على المجال الخطي و لنشترط سلوكا فيزيائيا خطيا للمادة أي تحقق قانون هوك (3.11) عندما نستطيع إخراج إشارة المتغير خارج الحد الأول وفق الشكل :

$$\delta(\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}) = \delta(c^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}\varepsilon_{ij}) = c^{ijk\ell}(\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{k\ell} + \varepsilon_{k\ell}\delta\varepsilon_{ij}) = 2c^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}\delta\varepsilon_{ij} = 2\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij} \quad (3.23)$$

كما نستطيع إخراج إشارة للتغير خارج الحدين الآخرين باعتبار أن متغير قيمة معلومة مساو للصفر. و بعد هذه الاشتراطات نحصل على مبدأ الطاقة الكامنة الذي يمكن كتابته بالشكل :

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{ij}c^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}dV - \int_V \bar{f}^i u_i dV - \int_{S_0} \bar{T}^i u_i ds\right) = 0 \quad (3.24)$$

$$\delta\Pi = \delta(\Pi_i + \Pi_a) = \delta\Pi_i + \delta\Pi_a = 0$$

حيث  $\Pi_i$  الطاقة الكامنة لقوى التشوه و  $\Pi_a$  طاقة القوى الخارجية و هي مكافئة لمكسوس عمل القوى الخارجية أما  $\Pi$  فهي الطاقة الكامنة للجسم. في هذا السياق لا بد أن نذكر أن التسمية الرياضية للقيمة  $\Pi$  هي ما نطلق عليه اسم تابعي أو (functional) هذا التابعي يأخذ قيمة حدية كما هو واضح من العلاقة (3.25) إذ أن متغيره الأول مساو للصفر . لتحديد ماهية هذه القيمة الحدية إن كانت قيمة صفري أو عظمى نبحث عن إشارة المتغير الثاني للقيمة التابعة . المتغير الأول للتابعي  $\Pi$  وفق العلاقة (3.24) هو :

$$\delta\Pi = \int_V c^{ijk\ell}\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{k\ell}dV - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{S_0} \bar{T}^i \delta u_i ds \quad (3.25)$$

و المتغير الثاني بعد الأخذ بعين الاعتبار أن التابع الذي يجري أخذ متغيره هو  $\varepsilon_{ij}$  أو  $u_i$  وليس  $\delta\varepsilon_{ij}$  أو  $\delta u_i$  هو :

$$\delta^2\Pi = \int_V \delta\varepsilon_{ij}c^{ijk\ell}\delta\varepsilon_{k\ell}dV \geq 0 \quad (3.26)$$

و هذا المقدار موجب دوماً لأنه يحوي على مربع متغير التشوهات و على معاملات الصلابة للمادة للموجة دوماً ، و هذا المربع موجب دوماً سواء أخذت التشوهات قيمة سالبة أم موجبة. بناءً على ذلك نستنتج أن الطاقة الكامنة تأخذ في حالة الأجسام المرنة الموجودة في حالة توازن ثمانية حدية صفري .

### 3-1-4- شروط استخدام مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

من خطوات الاشتقاق في الفقرة السابقة يتبين أن مجال استخدام مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري مقتصر على المجال الفيزيائي الخطي. و هو المجال الذي يسري فيه مفعول قانون هوك للمادة. وهذا الشرط وصفناه أثناء عملية الاشتقاق عندما استبدلنا  $\epsilon_{ij}$  بمكافئها  $\epsilon_{ij}^{th}$  في العلاقة (3.23). أما في المجال الهندسي الخطي و غير الخطي فمبدأ الطاقة الكامنة الأصغري ساري المفعول. و يمكن استخدامه حتى في حالة الانتقالات الكبيرة و ذلك لأن الشرط الوارد في العلاقة (3.21) لا يتطلب سوى أن تكون متوترة التشوهات متناظرة وهذا محقق إذا استخدمت العلاقات (2.26) لحالة السلوك الهندسي غير الخطي بدل استخدام العلاقة (2.29) لحالة السلوك الهندسي الخطي. اشتراطنا أيضا أثناء الاشتقاق انعدام متغير الانتقالات على جزء السطح الخارجي الذي تكون عليه الانتقالات معلومة مسبقا ( $S_0$ ). وبالتالي يجب أثناء اختيار توابع الانتقالات أن نراعي تحقق الشروط الطرفية الهندسية. بعد افتراض الانتقالات المحققة للشروط الطرفية الهندسية. يجب استخدام علاقات التشوهات - الانتقالات، العلاقة (2.26) لحالة السلوك الهندسي اللاخطي أو العلاقة (2.29) لحالة السلوك الهندسي الخطي، للحصول على توابع التشوهات. بعدها يستخدم قانون المادة (3.11) للحصول على توابع الإجهادات. ومعنى ذلك أن الاستخدام يفترض التحقق الدقيق لهذه العلاقات (على عناصر تفاضلية مقطوعة من الجسم). بعد هذا يمكن تقييم قيمة تابعي الطاقة الكامنة وأخذ متغيره، الذي يؤدي إلى تحقيق معادلات التوازن (3.9) بشكل تكاملي فقط (على كامل الوسط المستمر أو الجسم) و الشروط الطرفية الميكانيكية (3.14) على  $S_0$ . لا بد في النهاية أن نذكر أن مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري يشكل الأساس النظري لطريقة الانتقالات.

### 3-2- مبدأ الطاقة المتممة الأصغري

#### 3-2-1- العمل الداخلي المتمم

يراد حساب العمل الداخلي لقوى التشوه من أجل تزايد الإجهادات (على متوازي المستطيلات بأبعاد تفاضلية مقتطع من جسم ما) بمقدار تفاضلي  $d\sigma$ . بعد اتباع خطوات مشابهة للفقرة

2-1-1 في تحصيل مركبات الإجهادات على سطوح متوازي المستطيلات التفاضلي إلى قوى مؤثرة على هذه السطوح و تحديد الانتقالات الموافقة و الناتجة عن التشوهات  $\epsilon_{ij}$  سوف نجد أن تفضل العمل الداخلي لقوى التشوه و الذي سنسميه العمل الداخلي المتمم بمميزا له عن العمل الداخلي الكامن ، مساو للمقدار:

$$dW^*(\sigma) = \int_0^{\sigma^0} \epsilon_{ij} d\sigma^{ij} dV \quad (3.27)$$

يسمى تغير هذا المقدار لواحدة الحجم من الجسم بكثافة الطاقة المتممة .

$$w^*(\sigma) = \int_0^{\sigma^0} \epsilon_{ij} d\sigma^{ij} \quad (3.28)$$

و التفاضل التام له هو :

$$dw^*(\sigma) = \epsilon_{ij} d\sigma^{ij} \quad (3.29)$$

في حالة الأجسام المرنة يكون  $w^*(\sigma)$  تابعا للإجهادات فقط و بالتالي يعطى تفاضله التام بالعلاقة التالية :

$$dw^*(\sigma) = \frac{\partial w^*(\sigma)}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} \quad (3.30)$$

مقارنة (3.30) مع (3.29) ينتج :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial w^*(\sigma)}{\partial \sigma^{ij}} \quad (3.31)$$

و العمل الداخلي للمتمم على حجم الجسم يؤخذ بتكامل كثافة الطاقة المتممة على الحجم

$$W^*(\sigma) = \int_V \left( \int_0^{\sigma^0} \epsilon_{ij} d\sigma^{ij} \right) dV \quad (3.32)$$

### 3-2-2- اشتقاق مبدأ الطاقة المتممة الأصغري

سوف نقتصر في اشتقاق مبدأ الطاقة المتممة الأصغري على المجال الفيزيائي الخطي و على المجال الهندسي الخطي ، حيث يسري مفعول العلاقات (3.9) إلى (3.14) . لنفرض أننا أزعنا جسما

عن وضعية توازنه بتطبيق توابع إجهادات وهمية  $\delta\sigma^{\#}$  في الحجم  $V$  وأخرى موافقة لها على جزء السطح  $S_0$  وتحقق المساواة  $\delta T^i = \delta\sigma^{\#} n_i$ . فإذا استغنيا عن التحقق الدقيق لعلاقات التشوهات-الانتقالات (3.10) والشروط الطرفية الهندسية (3.12) و اكتفينا بتحققها تكاملياً على كامل حجم و سطح الجسم عندها نستطيع أن نكتب :

$$\int_V \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \delta\sigma^{\#} dV + \int_{S_0} (u_i - \bar{u}_i) \delta\sigma^{\#} n_i ds = 0 \quad (3.33)$$

باعتبار تناظر مشتقات الانتقالات  $(u_{i,j} = u_{j,i})$  و إتباع خطوات مشابهة لتلك التي اتقلنا لها من العلاقة (3.16) إلى العلاقة (3.18) أي كتابة مشتق جداء مضارب و استخدم مقولة غاوص في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي ، نجد أن :

$$-\int_V \delta\sigma^{\#} u_{i,j} dV = \int_V \delta\sigma^{\#}_{,j} u_i dV - \int_{S_0} \delta\sigma^{\#} n_j u_i ds - \int_{S_0} \delta\sigma^{\#} n_i u_j ds \quad (3.34)$$

بعمود (3.34) في (3.33) و اختصار الحدود المتشابهة نحصل على :

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma^{\#} dV - \int_V \delta\sigma^{\#}_{,j} u_i dV - \int_{S_0} \delta\sigma^{\#} n_j \bar{u}_i ds - \int_{S_0} \delta\sigma^{\#} n_i u_j ds = 0 \quad (3.35)$$

فإذا اخترنا توابع الإجهادات الوهمية محققة بشكل دقيق لمعادلات التوازن (3.9) والشروط الطرفية الميكانيكية (3.13) يكون :

$$\delta\sigma^{\#}_{,j} + \delta\bar{T}^i = 0 ; \delta\sigma^{\#}_{,j} = 0 \quad (3.36)$$

$$\delta\sigma^{\#} n_i + \delta\bar{T}^i = 0 ; \delta\sigma^{\#} n_j = 0 \quad \text{on } S_0 \quad (3.37)$$

وبالتالي تبسط العلاقة (3.35) إلى :

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma^{\#} dV - \int_{S_0} \delta\sigma^{\#} n_j \bar{u}_i ds = 0 \quad (3.38)$$

الحد الأول يمثل العمل الداخلي المتمم على كامل حجم الجسم .

و هذه العلاقة تمثل مبدأ آخر من مبادئ ميكانيك الإنشاءات و هو مبدأ القوى الوهمية . يسري مفعول هذا المبدأ أيضاً في المجال الفيزيائي غير الخطي أيضاً و ذلك لأننا في اشتقاقنا السابقة لم نشترط سريان مفعول أي قانون للمادة . للحصول على مبدأ الطاقة المتتمة الأصغري سوف

نشرط سلوكا فيزيائيا خطيا للمادة عندها نستطيع التعبير عن التشوهات بدلالة الإجهادات وفق العلاقة (2.33) و نخرج إشارة المتغير خارج الحد الأول .

$$\begin{aligned}\delta(\varepsilon_{ij}\sigma^{ij}) &= \delta(s_{ijkl}\sigma^{kl}\sigma^{ij}) = s_{ijkl}(\sigma^{ij}\delta\sigma^{kl} \\ &+ \sigma^{kl}\delta\sigma^{ij}) = 2s_{ijkl}\sigma^{kl}\delta\sigma^{ij} = 2\varepsilon_{ij}\delta\sigma^{ij}\end{aligned}\quad (3.39)$$

إشارة المتغير يمكن خراجها خارج الحد الأخير من (3.39) باعتبار متغير  $\bar{u}_i$  مساو للصفر ( قيمة معلومة مسبقا ) فنحصل على :

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int_V s_{ijkl}\sigma^{kl}\sigma^{ij}dV - \int_{\Sigma_0} \sigma^{ij}n_j\bar{u}_i ds\right) = 0 \quad (3.40)$$

القيمة السلمية بين القوسين الصغويين تمثل الطاقة المتممة و يرمز لها عادة بالرمز  $\Pi_c$  . و معنى ذلك انه وفق الاشتراطات السابقة ينعدم المتغير الأول للطاقة المتممة لجسم مرن تحت تأثير مجموعة قوى متوازنة .

$$\Pi_c = \frac{1}{2}\int_V s_{ijkl}\sigma^{kl}\sigma^{ij}dV - \int_{\Sigma_0} \sigma^{ij}n_j\bar{u}_i ds \quad ; \quad \delta\Pi_c = 0 \quad (3.41)$$

بحساب المتغير الثاني  $\Pi_c$  مع اعتبار أن المتغير يجري على  $\sigma^{ij}$  وليس على  $\delta\sigma^{ij}$  نجد أن :

$$\delta^2\Pi_c = \int_V \delta\sigma^{ij}s_{ijkl}\delta\sigma^{kl}dV \geq 0 \quad (3.42)$$

و هذا المقدار موجب دوماً لأن معاملات الليونة موجبة و مربع الإجهادات الاختيارية مقدار حدوده موجبة دوماً . و منه ينتج أن الطاقة المتممة تأخذ أيضاً حالة حديه صغرى .

### 3-3- شروط استخدام مبدأ الطاقة المتممة الأصغري

يقتصر سريان مفعول مبدأ الطاقة المتممة الأصغري المشتق في الفقرة السابقة على المجال الفيزيائي الخطي و على المجال الهندسي الخطي و من الواضح في العلاقة (3.33) أن علاقات التشوهات - الانتقالات و الشروط الطرفية الهندسية يتم تحقيقها تكاملياً على حجم و سطح الجسم المتعسر . بينما يجب أن تحقق توابع الإجهادات المفترضة معادلات التوازن والشروط الطرفية الميكانيكية تحقيقاً دقيقاً . نقطة الانطلاق الأساسية في استخدام مبدأ الطاقة المتممة إذا هي افتراض توابع



للإجهادات بثوابت اختيارية . وهذا الاختيار كما قلنا مقيد بالشروط الآتية الذكر . بعد هذا الافتراض يمكن تقييم الطاقة المتتممة  $\Pi_c$  المعرفة في العلاقة (3.41) . توابع الإجهادات على حصة السطح  $S_c$  هي توابع يتم الحصول عليها من توابع الإجهادات المفترضة للوسط الحتمي بتعويض معادلات أطراف الجسم الممتلئة عادة لسطوح الجسم و تقييم جداءات الإجهادات في نواظم هذه السطوح . يمثل مبدأ الطاقة المتتممة الأصغري الأساس النظري لطريقة القوى المعروفة في ميكانيك الإنشاءات .

### 3-3- مبادئ الطاقة الموسعة

لاستخدام مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري يلزمنا اختيار توابع عشوائية لكن اختيارها مقيد بتحقيقها للشروط الطرفية الهندسية . ولاستخدام مبدأ الطاقة المتتممة الأصغري يلزمنا اختيار توابع إجهادات عشوائية واختيارها بدوره مقيد بتحقيقها للشروط الطرفية للميكانيكية . ومسألة الاستخدام تغدو بالمعنى الرياضي بحثاً عن قيم حدية للطاقة الكامنة والطاقة المتتممة بشروط طرفية . غالباً ما يكون تحقيق الشروط الطرفية مصحوباً بمشاكل يصعب التغلب عليها وخاصة عند استخدام مبدأ الطاقة المتتممة . لذلك يلجأ عادة إلى تحويل مسألة البحث عن القيم الحدية بشروط طرفية إلى بحث عن قيم حدية بدون شروط طرفية بإدخال مضارب لاغرنج إلى مبادئ الطاقة الأساسية لنحصل على مبادئ الطاقة الموسعة التي سنشرحها بشكلها الرياضي في الفقرة الآتية . ولكن النهاية الحدية الصغرى التي تتميز بها الطاقة الكامنة أو الطاقة المتتممة تصبح نهاية حدية غير معروفة إن كانت صغرى أم عظمى . ويرتبط على عدم المعرفة هذه جهل بطبيعة تقارب الحل الناتج عن استخدام مبادئ الطاقة الموسعة إلى الحل الصحيح . بينما يجب أن يتقارب الحل الناتج عن الاستخدام الصحيح لمبادئ الطاقة الأساسية من الجهة العليا لأن الحل الصحيح يمثل النهاية الحدية الصغرى . لا بد من التنويه هنا أن استخدام مضارب لاغرنج إنشائياً مشابه لاستخدامها رياضياً إلا أنه في المجال الإنشائي يجب تفسير مضارب لاغرنج إنشائياً من حيث ماهيتها و من حيث أماكن فرضها

في الوسط الإنشائي . و ستوضح هذه المعاني في الفقرات و الفصول القادمة أثناء تعديل مبدأ الطاقة المتماثلة الأصغري و استخدامه على بعض نماذج المنشآت .

### 3-3-1- مضاريب لاغرانج و النهايات الحدية لتتابع بمحولات مستقلة

ليكن لدينا التابع :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.43)$$

حيث  $x_1, x_2, \dots, x_n$  متحولاته المستقلة ، و لنفرض أن هذا التابع معرف و مستمر في مجال مسطح و قابل للاشتقاق في مجال تعريفه . فالشرط اللازم لوجود النهاية الحدية لهذا التابع :

$$y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (3.44)$$

هو انعدام مشتقاته الجزئية بالنسبة للمتغيرات المستقلة  $x_1, x_2, \dots, x_n$  عند النقطة  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  أي :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0 \quad (3.45)$$

هذا الشرط لازم و ليس كافيا بعد لوجود نهاية حدية أو لتحديد ماهية هذه النهاية الحدية إن كانت صغرى أم عظمى . نقبل بأن الشرط الكافي لوجود نهاية حدية للتابع (3.43) هو أن يكون معين مصفوفة مشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية عند النقطة  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  أكبر من الصفر .

$$\det \begin{pmatrix} f_{,x_1x_1} & f_{,x_1x_2} & \dots & f_{,x_1x_n} \\ f_{,x_2x_1} & f_{,x_2x_2} & \dots & f_{,x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,x_nx_1} & f_{,x_nx_2} & \dots & f_{,x_nx_n} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.46)$$

و النهاية الحدية هي نهاية صغرى إذا كانت مصفوفة المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية موجبة بالتعريف أما ما عدا ذلك فالنهاية حدية عظمى . و أما في حال انعدام معين المصفوفة المذكورة فلا نستطيع تحميم وجود نهاية حدية . و مصفوفة المشتقات الجزئية هي موجبة بالتعريف إذا كانت قيم معينات مصفوفاتها الجزئية المتتامة كلها موجبة أي :

$$f_{,x_1x_1} > 0; \begin{vmatrix} f_{,x_1x_1} & f_{,x_1x_2} \\ f_{,x_2x_1} & f_{,x_2x_2} \end{vmatrix} > 0; \dots \begin{vmatrix} f_{,x_1x_1} & f_{,x_1x_2} & \dots & f_{,x_1x_n} \\ f_{,x_2x_1} & f_{,x_2x_2} & \dots & f_{,x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,x_nx_1} & f_{,x_nx_2} & \dots & f_{,x_nx_n} \end{vmatrix} > 0 \quad (3.47)$$

كمثال على تحديد النهاية الحدية لتابع بتحويلين مستقلين نأخذ التابع :

$$y = x_1^3 x_2^2 (1 - x_1 - x_2) \quad (3.48)$$

قاعدة انعدام المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى تؤدي إلى :

$$f_{,x_1} = x_1^2 x_2^2 (3 - 4x_1 - 3x_2) = 0 \quad (3.49)$$

$$f_{,x_2} = x_1^3 x_2 (2 - 2x_1 - 3x_2) = 0$$

والنقاط المحتملة للنهاية الحدية هي  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (c_2, 0), (0, c_1)$  حيث  $c_2, c_1$  ثوابت لا على التعيين . إذ أنه عند كل النقاط السابقة نعدم جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى . وهذا الشرط لم يكن كافيا لتحديد النهاية الحدية . لنحدد الآن توابع مصفوفة المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية (3.46) و نحسب قيم معينها عند النقاط المحتملة كقيم حدية فنجد أن :

$$\begin{aligned} f_{,x_1x_1} &= x_1 x_2^2 (6 - 12x_1 - 6x_2) \\ f_{,x_1x_2} &= f_{,x_2x_1} = x_1^2 x_2 (6 - 8x_1 - 9x_2) \\ f_{,x_2x_2} &= x_1^3 (2 - 2x_1 - 6x_2) \end{aligned} \quad (3.50)$$

و معين المصفوفة عند النقطة  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  هو :

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{3}{144} > 0 \quad (3.51)$$

وبما أن أحد المعينات الجزئية للمتامية للمصفوفة هو التالي:

$$f_{,x_1x_1} = -\frac{1}{9} < 0 \quad (3.52)$$

أصغر من الصفر فالمصفوفة ليست موجبة بالتعريف و النهاية الحدية عند النقطة  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  هي نهاية حدية عظمى . أما في بقية النقاط المحتملة كنهاية حدية فإن معين للمصفوفة مطابق للصفر ولا نستطيع عند هذه النقاط التحدث عن نهايات حدية . كما أسلفنا مستخدم مضارب لاغرنج لتحويل مسألة البحث عن قيم حدية لتابع ما أو قيمة تابعة بشروط طرفية إلى بحث عن قيم حدية دون شروط طرفية . لنفرض أننا نبحث عن قيمة حدية لتابع بعدة متحولات مستقلة .

$$y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.53)$$

المتحولات المستقلة لهذا التابع مرتبطة مع بعضها البعض بالشرط الطرقي .

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (3.54)$$

و نريد الآن البحث عن قيمة حدية للتابع (3.53) تحقق الشرط الطرقي (3.54) . نشكل الآن التابع :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.55)$$

حيث  $\lambda$  مضروب لاغرنج الذي أدخل بالنسبة لتابع لاغرنج  $F$  كمتحول مستقل . يستعاض الآن عن الشرط اللازم لوجود نهاية حدية للتابع  $f$  بالشرطين التاليين للتابع  $F$  :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (3.57)$$

يلاحظ أن الشرط الطرقي (3.54) محتوى في الشرط اللازم لوجود نهاية حدية لتابع لاغرنج كمثال تطبيقي نأخذ التابع :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1) \quad (3.58)$$

الذي نود البحث عن نهاية حدية له تحقق الشرط :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0 \quad (3.59)$$

لإيجاد النهاية الحدية التي تحقق الشرط السابق نقوم بحساب أحد المتحولات المستقلة بدلالة المتحولين الآخرين من الشرط الطرقي نفسه و نعوضه في المعادلة (3.58) فنحصل على معادلة

بمتحولين مستقلين فقط ، فإذا قمنا بحذف المتحول  $x_1$  نحصل بتطبيق شرط النهاية الحدية (3.45) على المعادلتين التاليتين :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 + 12x_3 + 18 = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 12x_2 + 20x_3 + 28 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين يمكن حساب إحداثيات النقطة الحدية على المحورين  $x_2, x_3$  ، ويجري حساب  $x_1$  من المعادلة (3.59) . و نجد بالنتيجة أن النهاية الحدية تمثلها النقطة التي إحداثياتها  $(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{8}{7})$  ويمكن التأكد أن هذه النقطة تمثل نهاية حدية صغرى . الآن سوف نبحث عن النهاية الحدية باستخدام تابع لاغرنج . يأخذ تابع لاغرنج وفق العلاقة (3.55) الشكل :

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4) \quad (3.61)$$

و الشرط اللازم لوجود النهاية الحدية يقضي إلى المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 1) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 1) + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} &= 2(x_3 - 1) + 3\lambda = 0. \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

بحل هذه المعادلات نحصل على قيمة مضروب لاغرنج  $\lambda = \frac{10}{7}$  و إحداثيات النقطة الحدية  $(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{8}{7})$  . لنرى ماذا تمثل هذه النهاية الحدية بالنسبة لتابع لاغرنج  $F$  إذا ما حللنا منه المتحولات  $x_1, x_2, x_3$  ، بمساعدة للمعادلات الثلاثة الأولى من (3.62) . بعد هذا الإجراء نحصل على تابع لاغرنج الممثل بالمعادلة :

$$F(\lambda) = -\frac{14}{4}\lambda^2 + 10 = 0 \quad (3.63)$$

و القيمة  $\lambda = \frac{10}{7}$  تمثل فعلا النهاية الحدية للتابع  $F(\lambda)$  ولكنها أصبحت نهاية حدية عظمى . وهكذا بعد استخدام مضارب لاغرنج في تحويل مسألة البحث عن نهاية حدية بشروط طرفية إلى البحث عن نهاية حدية دون شروط طرفية لا يمكن الجزم بطبيعة النهاية الحدية التي سوف نحصل عليها . و هذه إحدى مساوئ مبادئ الطاقة المعدلة بمضارب لاغرنج مقترنة بإحدى الطرق التقريبية كطريقة العناصر المنتهية إذ أننا لا نستطيع الجزم بأن الحل الناتج يقارب الحل الصحيح من الجهة العليا أو من الجهة الدنيا ، وإنما نستطيع القول أن الحل الناتج يمثل النهاية الحدية المطلوبة .

### 3-3-2- مبدأ الطاقة المتممة المعدل

أثناء اشتقاق مبدأ الطاقة المتممة الأصغري في الفقرة 3-2-2 أوضحنا أنه يجب أن نختار توابع الإجهادات الوهمية محققة بشكل دقيق لمعادلات التوازن و الشروط الطرفية الميكانيكية. غالبا ما يرتبط تحقيق الشروط الطرفية الميكانيكية باستخدام توابع الإجهادات المفترضة بصعوبات ليس من السهل التغلب عليها . و لذلك تحول مسألة البحث عن نهاية حدية أصغرية للطاقة المتممة بشروط طرفية إلى بحث عن نهاية حدية تابعي مناسب معدل للطاقة المتممة بدون شروط طرفية، و ذلك بإضافة الشروط الطرفية الميكانيكية وتشكيل تابع لاغرنج كما أسلفنا في الفقرة السابقة . في هذه الحالة يصبح لدينا حرية أكثر في اختيار توابع الإجهادات الافتراضية إذ أنه يطلب فقط أن تحقق هذه التوابع معادلات التوازن ، وهذا غالبا ما يكون سهل التحقيق . نشكل الآن تابع لاغرنج للطاقة المتممة على غرار الشكل الرياضي في الفقرة السابقة بإضافة الشروط الطرفية الميكانيكية إلى القيمة التابعة للطاقة للمتممة (3.41). بعد ضرب هذه الشروط بمضارب لاغرنج  $\lambda_i$  نحصل على الطاقة للمتممة المعدلة :

$$\Pi_{ch} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ijk}^0 \sigma_{ijk}^0 dV - \int_{S_0} \sigma_{ij}^0 n_j \bar{u}_i ds - \int_{S_0} (\sigma_{ij}^0 n_j - \bar{T}_i) \lambda_i ds \quad (3.64)$$

$\lambda_i$  يمثل عددا من مضاريب لاغرنج المكافئة لعدد الشروط الطرفية الموجودة . و هذه المضاريب ذات الطبيعة الرياضية البحتة الآن يجب أن تفسر إنشائها من شروط النهاية الحدية . فحتى نحصل على نهاية حدية للطاقة المتضمنة المعلقة  $\Pi_{ch}$  يجب أن يتعلم متغيرها الأول ، و هنا يعني أن :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{ch} = & \int_V \delta \sigma^{\#} s_{ijk} \sigma^{kj} dV - \int_{s_n} \delta \sigma^{\#} n_j \bar{u}_i ds \\ & - \int_{s_o} \sigma^{\#} n_j \lambda_i ds - \int_{s_o} (\sigma^{\#} n_j - \bar{T}^i) \delta \lambda_i ds = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

نعيد صياغة الحد الأول بالشكل :

$$\begin{aligned} T_i = & \int_V \delta \sigma^{\#} s_{ijk} \sigma^{kj} dV = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma^{\#} dV \\ = & \int_V \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \delta \sigma^{\#} dV + \int_V \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta \sigma^{\#} dV \end{aligned} \quad (3.66)$$

لقد تم إضافة و طرح الحد الأخير من المعادلة السابقة إلى الحد الأول من المعادلة (3.65) . العلاقة (3.65) تأخذ بالاستفادة من قاعدة اشتقاق جلاء مضاريب :

$$(u_i \delta \sigma^{\#})_{,j} = u_{i,j} \delta \sigma^{\#} + u_i \delta \sigma^{\#}_{,j} \quad (3.67)$$

و اعتبار التناظر :

$$\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta \sigma^{\#} = u_{i,j} \delta \sigma^{\#} = (u_i \delta \sigma^{\#})_{,j} - u_i \delta \sigma^{\#}_{,j} \quad (3.68)$$

و استخدام تكامل غاوص في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي :

$$\int_V (u_i \delta \sigma^{\#})_{,j} dV = \int_{s_j} u_i \delta \sigma^{\#} n_j ds = \int_{s_o} u_i \delta \sigma^{\#} n_j ds + \int_{s_o} u_i \delta \sigma^{\#} n_j ds \quad (3.69)$$

و ملاحظة أن توابع الإجهادات الافتراضية تحقق معادلات التوازن التالية بدقة :

$$\int_V (u_i \delta \sigma^{\#}_{,j}) dV = 0 \quad (3.70)$$

الشكل التالي :

$$T_i = \int_V \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \delta \sigma^{\#} dV + \int_{s_n} \delta \sigma^{\#} n_j u_i ds + \int_{s_o} \delta \sigma^{\#} n_j u_i ds \quad (3.71)$$

بتعويض هذا الحد في العلاقة (3.65) و تجميع الحدود المتوافقة نحصل على :

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{ch} = & \int_V [\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})] \delta\sigma^j_i dV + \int_{s_u} \delta\sigma^j_i n_j (u_i - \bar{u}_i) ds \\ & + \int_{s_u} \delta\sigma^j_i n_j (u_i - \lambda_i) ds - \int_{s_u} (\sigma^j_i n_j - \bar{T}^i) \delta\lambda_i ds = 0\end{aligned}\quad (3.72)$$

و باعتبار أن المتغيرات  $\delta\sigma^j_i, \delta\sigma^j_i n_j, \delta\sigma^j_i$  عشوائية فحتى ينعدم المتغير الأول للطاقة المتممة المعدلة يجب أن تتحقق للمعادلات التالية :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) &= 0 \quad \text{in } V \\ u_i - \bar{u}_i &= 0 \quad \text{on } s_u \\ u_i - \lambda_i &= 0 \quad \text{on } s_\sigma \\ \sigma^j_i n_j - \bar{T}^i &= 0 \quad \text{on } s_\sigma\end{aligned}\quad (3.73)$$

من هذه العلاقات نستخدم العلاقة الثالثة فقط لنستدل على المعنى الإنشائي لمضاريب لاغرنج .

$$\lambda_i = u_i \quad \text{on } s_\sigma \quad (3.74)$$

و معنى ذلك أن مضاريب لاغرنج تمثل الانتقالات على  $s_\sigma$  ( السطح الذي تكون عليه القوى معلومة مسبقاً). هذه الانتقالات يسمح الآن باختيارها باستقلالية تامة عن الحالة الإجهادية المفترضة . بالعودة الآن إلى العلاقة (3.65) و تبديل  $\lambda_i$  بمكافئها  $u_i$  نحصل على :

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{ch} = & \int_V \delta\sigma^j_i S_{ijk} \sigma^k_j dV - \int_{s_u} \delta\sigma^j_i n_j \bar{u}_i ds - \\ & - \int_{s_\sigma} \delta\sigma^j_i n_j u_i ds - \int_{s_\sigma} (\sigma^j_i n_j - \bar{T}^i) \delta u_i ds = 0\end{aligned}\quad (3.75)$$

بعد ملاحظة متغير الجداء :

$$\delta \int_{s_\sigma} \sigma^j_i n_j u_i ds = \int_{s_\sigma} \delta\sigma^j_i n_j u_i ds + \int_{s_\sigma} \sigma^j_i n_j \delta u_i ds \quad (3.76)$$

و مراعاة (3.39) في إخراج إشارة للمتغير خارج الحد الأول و إمكانية إخراجها خارج الحد الثالث و الجزء الأخير من الحد الرابع للعلاقة (3.75) نجد أن :

$$\delta\Pi_{ch} = \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_V \sigma^j_i S_{ijk} \sigma^k_j dV - \int_{s_u} \sigma^j_i n_j \bar{u}_i ds - \int_{s_\sigma} (\sigma^j_i n_j - \bar{T}^i) u_i ds \right\} = 0 \quad (3.77)$$

و مبدأ الطاقة المتممة المعدل يعبر عنه عظاما بالعلاقتين الرياضيتين .



$$\Pi_{ch} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 S_{ijkl} \sigma_{kl}^0 dV - \int_{z_0} \sigma_{ij}^0 n_j \bar{u}_i ds - \int_{z_0} (\sigma_{ij}^0 n_j - \bar{T}^i) u_i ds = 0 \quad (3.78)$$

$$\delta \Pi_{ch} = 0 \quad (3.79)$$

القيمة التابعة  $\Pi_{ch}$  تحتوي على توابع الإجهادات الافتراضية في الحجم  $V$  كمجهل. من هذه التوابع تشتق توابع الإجهادات على السطوح التي تكون فيها الانتقالات و الإجهادات معلومة . إضافة إلى الإجهادات المفترضة لدينا توابع انتقالات افتراضية على جزء السطح الذي تكون فيه الإجهادات معلومة ( $S_0$ ) كمجهل مستقلة أخرى . في الفصول اللاحقة سوف نطبق هذا المبدأ على بعض النماذج الإنشائية . إن إدخال مضارب لاغرنج لتحقيق شرط أو مجموعة شروط طرفية على مبدأ الطاقة الكامنة أو على مبدأ الطاقة المتمة و على المبادئ المعدلة منها يفضي إلى مبادئ معدلة أخرى لا مجال لحصرها في سياق هذا الكتاب .

### 3-4-المصادر العلمية

بالإضافة إلى المصادر المستخدمة في الفصول السابقة استعملت المصادر التالية :

#### 1. Pian , T.H.H

Finite element method by variational principle with relaxed continuity requirement in : Variational methods in Engineering vol 1-2 Southampton uni . Perss , Southampton England 1973

#### 2. Wunderlich , W .

Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler elastizitätsprobleme Ing . Archiv 39 ( 1970 ) p . 230 - 247 .

#### 3. Pian , T . H . H . ; Tong , p .

Basis of finite element method for solid continua Int . j . Num. Meth. Eng . vol 1 ( 1969 ) p . 3 - 38 .

#### 4. Washizu , K .

some considerations of basic theory for the finite element method ,  
Advanced compt . Methods in structure (Mech . and Design edited by J.  
T. oden ; R. W. clough and y. yamamoto ) , P. 39 - 53 , UAH Press ,  
Alabama ( 1972 ) .

5. Zurmuehl , R .

Matrizen und ihre technischen Anwendung ,Springer - Verlag . Berlin  
Goettingen . Heiedelberg , 1984 .

6 . Gellert , W . Kaestner , H . ; Hellwich , M , Kleine Enzyklopaedie  
Mathematik ,VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1986 .

7 . Gellert , W . ; Kaestner , H . ; Neuber , S.

Lexikon der Mathematik ,VEB Bibliographisches Institut ,Leipzig 1985

8 . Atluri , S . N . , Gallagher , R . H . ; Zienkiewicz , O . C . ; Hybrid and  
Mixed Finite Element Methods John Wiley & sons ; chichester , New  
York , Brisbane Toronto , Singapore , 1983 .

9 . Cook , K . D

concepts and application of finite element analysis, John Wiley & sons ,  
New York. Chichester. Brisbane. Toronto. singapore , 1981 .

10 . Toupin , R . A . , Washington , D . C .

A variational principle for mesh - type analysis of mechanical systems ,  
Transaction of ASME , Journal of Applied Mechanics , vol . 74 ( 1952 ) 3 .  
p .151 - 152 .

11 . Fraeys DE Veubeke , B . M . ; Geradin , M . ; Huch , A , Hogge , A .  
structural Dynamics and Heat conduction, Int. centre of mechanical  
sciences , courses and Lectures, No . 126 , springer - verlag , Wien - Neu  
york , 1972 .

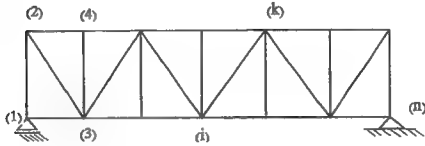
12 . Gladwell , G . M . L . ; Zimmerman , G .

on energy and complementary energy formulations of acoustics and  
structural vibration problems, Int . J of Sound and Vibration 3 ( 1966 ) 3 ,  
p . 233 - 241 .

#### 4- طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات في حل المسائل وحيدة البعد

سوف تعرض في البدء طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات في حل المسائل الوحيدة البعد على عناصر الجوائز الشبكية بتفصيل مسهب بغية التقدم المبسط للطريقة والإسهام السريع في استيعابها من قبل القارئ المبتدئ . في معالجة عناصر الجوائز الشبكية سوف يفترض أن :

- قضبان الجوائز تنقل القوى دون احتكاك
- اتصالات القضبان مع بعضها البعض مركزة أي أن محاور القضبان المتصلة بعقدة ما تتقاطع في مركز العقدة .
- تحميل الجوائز الشبكي يتم إما بقوى محورية على العناصر أو بقوى مركزة على العقد

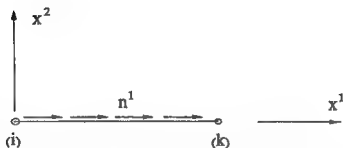


شكل 1-4 جوائز شبكي — عقدة n

#### 1-4- معادلات نظرية المرونة في قضيب من جوائز شبكي

لنقتطع من جوائز شبكي قضيب ما ( شكل 1-4 ) منسوب إلى جملة محاور إحداثية محلية. و عمل بمحمولة محورية موزعة  $\bar{m}^1$  تابعة للإحداثي  $x^1$  شكل (2-4). وفق الافتراضات المألوفة أعلاه يتعرض قضيب الجوائز الشبكي لقوى مقطع محورية أو لإجهادات محورية  $\sigma^{x^1}$  باتجاه

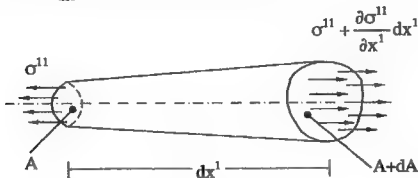
$x^1$  و  $x^2$  بتعتمد بقية الإجهادات . كما أن التشوهات الحاصلة تقتصر على التشوه المحوري . ولهذا سوف نختصر هنا كتابة القرائن فعوضاً عن  $\sigma^{x^1 x^1}$  سنكتب  $\sigma^{11}$  وتستبدل  $\epsilon_{x^1 x^1}$  بالرمز  $\epsilon_{11}$  و  $E^{x^1 x^1 x^1 x^1}$  ببساطة بالرمز  $E$  وهكذا...



شكل 4-2 : قضيب من جائلز شبكي ، حالة التحميل ، الإحداثيات الخاصة .  
وبناء على ذلك تقلص معادلات نظرية المرونة الخمسة عشر لتصبح على الشكل التالي :  
\* معادلات التوازن :

تقلص معادلات التوازن الثلاثة إلى معادلة توازن واحدة باتجاه  $x^1$  وهي :

$$-\sigma^{11}A + \left(\sigma^{11} + \frac{d\sigma^{11}}{dx^1} dx^1\right)(A + dA) + \bar{n}^1 dx^1 = 0 \quad (4.1)$$



شكل 4-3 : عنصر تفاضلي من قضيب الجائلز الشبكي

و ذلك بافتراض توزيع منتظم للإجهادات على سطوح المقاطع و بعد اختصار الحدود للتشابه وإهمال الجداءات التفاضلية من للرتبة الثانية و القسمة على  $dx^1$  تصبح هذه المعادلة كما يلي :

$$\sigma^{11} \frac{dA}{dx^1} + \frac{d\sigma^{11}}{dx^1} A + \bar{n}^1 = 0 \quad (4.2)$$

أو

$$\frac{d}{dx^1} (\sigma^{11} A) + \bar{n}^1 = 0 \quad (4.3)$$

و الجداء  $\sigma^{11} A$  يمثل القوة  $N^1$  في المقطع A و يستعاض عادة عن معادلات توازن الإجهادات بمعادلات توازن قوى المقطع .

\* علاقات التشوهات - الانتقالات :

تفصل علاقات التشوهات - الانتقالات الستة في الحالة الخطية إلى العلاقة :

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx^1} = u_{1,x^1} \quad (4.4)$$

و ذلك باعتبار أن التشوهات البقية معلومة .

\* قانون المادة :

يحتوي قانون المادة على علاقة واحدة أيضا تربط الإجهاد الناطمي بالتشوه و هو لحالة السلوك الخطي بوجود تشوهات مسبقة .

$$\sigma^{11} = E(\varepsilon_{11} - \bar{\varepsilon}_{11}) \quad (4.5)$$

و التشوهات المسبقة قد تحصل نتيجة تأثيرات خارجية كاختلاف درجات الحرارة و هبوط المساند أو غيرها . و للمعادلات السابقة تمثل المعادلات الأساسية لنظرية المرونة في الحالة الخاصة المدروسة . يمكن الحصول على علاقات الإجهادات - الانتقالات بتعويض العلاقة (4.4) في

(4.5) :

$$\sigma^{11} = (u_{1,x^1} - \bar{\varepsilon}_{11}) \quad (4.6)$$

و المعادلة التفاضلية التي تحكم المسألة نحصل عليها بتعويض الأخيرة في معادلة التوازن (4.3) .

$$\left[ EA(u_{1,x^1} - \bar{\varepsilon}_{11}) \right]_{x^1} + \bar{n}^1 = 0 \quad (4.7)$$

#### 4-2- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري :

يمكن الحصول على مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري لهذه الحالة الخاصة باتباع خطوات مماثلة لما ورد في الفقرة 3-1-4 و يكتفى الآن بذكره في حالة عدم وجود تشوهات مسبقة .

$$\Pi = \sum_i \left( \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon_{ii} E A \varepsilon_{ii} dx^1 - \int_0^l \bar{n}^1 u_i dx^1 \right) - \sum_m \bar{F}^{(m)} u_{i(m)} \quad (4.8)$$

$$\delta \Pi = 0 \quad (4.9)$$

حيث :

$\sum_i$  المجموع على عناصر الجائز الشبكي

$\bar{F}^{(m)}$  القوة المركزة في العقدة (m)

$\sum_m$  المجموع على عقد الجائز الشبكي المحملة بقوة مركزة

$l$  طول عنصر الجائز الشبكي

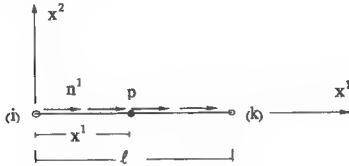
من الواضح أن الحد الأول من الطرف اليميني للعلاقة (4.8) يمثل طاقة التشوه للقوى الداخلية والحدين الآخرين من الطرف نفسه يمثلان عمل القوى الخارجية المؤلفة من قوى خطية موزعة وفق محاور العناصر و قوى مركزة في عقد الجائز الشبكي .

#### 4-3- خوارزميات طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات .

لنقطع من الجائز الشبكي قضيبا (i)(k) و ننسبه إلى جملة محاور إحداثية عملية ليكون  $u_1(x^1)$  انتقال نقطة ما p ضمن العنصر  $u_{i(k)}, u_{i(l)}$  انتقالات العقدتين (k), (i) على التوالي في اتجاه  $x^1$  . إن البدء بتوابع انتقالات اختيارية معرر نظريا أثناء اشتقاق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري و الذي يشكل الأساس النظري لحلنا هذا . لذلك من الممكن افتراض انتقال النقطة p كمتغير حلود بثوابت اختيارية:

$$u_1(x^1) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 (x^1)^2 + \dots + c_m (x^1)^m$$

$$= c_n (x^1)^n; n = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.10)$$



شكل 4-4 : قضيب من جوائز شبكي كمعبر منتهي ، الجملة الإحداثية

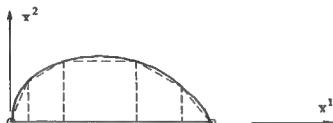
هذا الافتراض الرياضي البحث له ما يبرره نظرياً . يمكن أن يفترض عوضاً عن كثير الحدود هذا أي توابع رياضية أخرى محققة لشروط الاستمرارية و قابلية الاشتقاق . محاكمة منطقية نستنتج أنه إذا عبر التابع (4.10) فعلاً عن انتقال أي نقطة ضمن المعبر المنتهي (i)(k) بدلالة الإحداثي  $x^1$  فيجب أن يعطي انتقالات العقدتين (i), (k) إذا ما عوضنا إحداثي العقدتين المذكورتين  $x^1 = 0$  ,  $x^1 = l$  على التوالي في التابع نفسه .

$$u_{1(i)} = c_0 + 0 + 0 + \dots$$

$$u_{1(k)} = c_0 + c_1 l + c_2 l^2 + \dots \quad (4.11)$$

وهذا ما تقتضيه أيضاً الشروط الطرفية الهندسية على مستوى المعبر المنتهي. نلاحظ من المعادلتين السابقتين أنه يمكن أن نعطي ثابتين اختياريين فقط مضموناً ميكانيكياً و أنه يمكن تحديدهما بدلالة انتقال العقدتين (i), (k) . بناء على ذلك نجد أن عدد الثوابت الاختيارية الممكنة تضمينها معنى ميكانيكياً أو للممكن تحديدها على الإطلاق مسلو لعدد درجات الحرية للمعبر المنتهي والخطوة التالية تلخص الآن في تحديد الثوابت الاختيارية  $c_0, c_1, c_2, \dots$  لكثير الحدود المفترض (4.10) . يفضل عادة اختيار التابع الافتراضي أبسط ما يمكن و من المراتب الدنيا إذ يمكن تقريب التوابع من المراتب العليا بتوابع بسيطة من المراتب الدنيا بعد تقسيمها إلى مجالات متجاورة بشكل

(5-4) و العكس ليس ممكنا . لذلك نختار لمساأتنا المطروحة الثابت  $c_1$  و بالتالي كثير الحدود من المرتبة الأولى ليعبر عن التابع (الخط المستقيم) التقريبي للفترض (4.10).



شكل 4-5: تابع من المراتب العليا مقرب بتابع خطي (الخط المنقط)

$$u_1(x^1) = c_0 + c_1 x^1 = c_n (x^1)^n; n = 0, 1 \quad (4.12)$$

و بناء على ذلك تصبح العلاقتان (4.11) بالشكل :

$$u_{1(i)} = c_0$$

$$u_{1(k)} = c_0 + c_1 \ell \quad (4.13)$$

نكتب هاتين العلاقتين باستخدام الكتابة بالقرائن بغية التعبير العام عن عوارزميات الطريقة .

$$u_{1(p)} = c_n A^n_{(p)} ; (p) = (i), (k); n = 0, 1 \quad (4.14)$$

$$A^n_{(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ell \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

إذ أن الصيغة (4.14) هي نفسها الصيغة التي يتم الحصول عليها للعناصر المنتهية الثنائية البعد والثلاثية البعد و الاختلاف هو في حجم الثوابت وانتقالات العقد و المصفوفة المعلوم  $A^n_{(p)}$  . يمكن الآن تعيين الثوابت الاختيارية  $c_n$  بحل جملة المعادلات (4.14) بدلالة انتقالات العقد .

$$c_n = (A^n_{(p)})^{-1} u_{1(p)} = B^{(p)}_n u_{1(p)} \quad (4.16)$$

حيث المصفوفة  $B^{(p)}_n$  هي مقلوب المصفوفة  $A^n_{(p)}$  وهي مكافئة للتالي :



$$B^{(p)}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

بتعويض الثوابت الاختيارية (4.16) في العلاقة (4.12) نحصل على علاقة تربط بين الانتقال لنقطة ما  $p(x^1)$  ضمن العنصر المنتهي و انتقالات عقده و هي :

$$u_i(x^1) = B^{(p)}_n \cdot (x^1)^n \cdot u_{i(p)} ; n = 0,1 ; (p) = (i), (k) \quad (4.18)$$

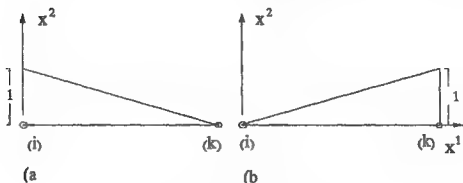
وهي تفصيليا :

$$u_i(x^1) = \left[ 1 - \frac{x^1}{\ell} \quad \frac{x^1}{\ell} \right] \begin{bmatrix} u_{i(i)} \\ u_{i(k)} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

أو باستخدام القرائن :

$$u_i(x^1) = N^{(p)} u_{i(p)} ; N^{(p)} = B^{(p)}_n (x^1)^n \quad (4.20)$$

حيث  $N^{(p)}$  هي ما يطلق عليه عادة نوابج الشكل (form function) . ولها خاصية مشتركة لكل العناصر المنتهية ، هي تساوي الواحد في العقدة المعتبرة عند تعويض إحداثياتها فيها و الصفر في باقي العقد . بتعويض إحداثي العقدة  $(i)$  ( $x^1 = 0$ ) في العلاقة (4.19) نحصل على تابع الشكل الممثل بالشكل (4-6-a) و بتعويض إحداثي العقدة  $(k)$  ( $x^1 = \ell$ ) في نفس العلاقة نحصل على تابع الشكل الممثل بالشكل (4-6-b) . يمكن الآن الحصول على تشوهات نقطة ما ضمن العنصر المنتهي بدلالة انتقالات عقد العنصر باستخدام علاقات التشوهات - الانتقالات . بتطبيق العلاقة (4.4) نحصل على :



شكل 4-6 : نوابج الشكل في العنصر المنتهي

$$\varepsilon_{11} = N^{(p)}, x^1 u_{1(p)} = N^{(q)}, x^1 u_{1(q)} \quad (4.21)$$

حيث (q) قرينة مماثلة لـ (p). و الشكل التفصيلي لهذه العلاقة هو :

$$\varepsilon_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(i)} \\ u_{1(k)} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

بعد ذلك تقيم طاقة التشوه الداخلي الواردة في العلاقة (4.8) لعنصر منتهي لتصبح :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \varepsilon_{11} EA \varepsilon_{11} dx^1 = \int_0^\ell u_{1(p)} N^{(p)}, x^1 EA N^{(q)}, x^1 u_{1(q)} dx^1 \\ &= \frac{1}{2} u_{1(p)} k^{1(p)1(q)} u_{1(q)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

حيث  $k^{1(p)1(q)}$  مصفوفة الصلابة للعنصر للنتهي و هي تساوي :

$$k^{1(p)1(q)} = \int_0^\ell N^{(p)}, x^1 EA N^{(q)}, x^1 dx^1 \quad (4.24)$$

و هي تفصيليا مساوية لما يلي :

$$k^{1(p)1(q)} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{1(i)1(i)} & k^{1(i)1(k)} \\ k^{1(k)1(i)} & k^{1(k)1(k)} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

لمعرفة ماهية مصفوفة القساوة نطبق على العنصر (i)(k) في العقدة (i) قوة باتجاه  $x^1$  مساوية لـ  $\frac{EA}{\ell}$  و بالتالي الإجهاد الحاصل في المقطع عند (i) هو  $\frac{E}{\ell}$  و التشوه الحاصل  $\frac{1}{\ell}$

. التشوه الحاصل من جهة أخرى هو مقلدو تطاول العنصر على طوله الأصلي  $\frac{\Delta \ell}{\ell}$  و منه

نستنتج أن الانتقال الحاصل في النقطة (i) مكافئ إذا لواحدة الانتقالات . إذا  $k^{1(i)1(i)}$  يمثل القوة الناشئة في (i) باتجاه محور العنصر لانتقال في (i) مقداره واحدة الانتقالات في اتجاه محور

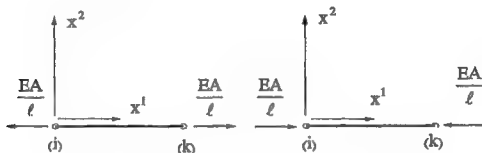
العنصر . في العقدة (k) تنشأ قوة معاكسة لتلك المطبقة في (i) و مقدارها  $-\frac{EA}{\ell}$  و هي

مكافئة للمقدار  $k^{1(k)1(i)}$  أي أن  $k^{1(k)1(i)}$  هو القوة الناشئة في (k) باتجاه محور العنصر

لانتقال مقداره واحدة الانتقالات في (I) في اتجاه محور العنصر. و بشكل مماثل يمكن تفسير المقادير  $k^{I(k)I(i)}$ ،  $k^{I(k)I(i)}$ .

ولانتقالات للعقد مقاديرها  $u_{I(q)}$  تنشأ قوى مقطع طرفية مساوية للمقدار :

$$F^{I(p)} = k^{I(p)I(q)} u_{I(q)} \quad (4.26)$$



شكل 4-7 : قوى المقطع الطرفية لانتقال واحد في العقدة (i) شكل 4-8 : قوى المقطع الطرفية لانتقال واحد في العقدة (k) هذه العلاقة يمكن استنتاجها مباشرة من مبدأ الانتقالات الوهمية فالتغير الأول لطاقة التشوه الداخلية (4.23) مساو لما يلي :

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \delta u_{I(p)} k^{I(p)I(q)} u_{I(q)} + \frac{1}{2} u_{I(p)} k^{I(p)I(q)} \delta u_{I(q)} = \delta u_{I(p)} k^{I(p)I(q)} u_{I(q)} \quad (4.27)$$

و هو مكافئ لعمل القوى الداخلية الناشئة من انتقالات وهمية للعقد مقدارها  $\delta u_{I(p)}$ . فبما لو اعتبرنا قوى المقطع الطرفية قوى خارجية و أعطينا انتقالات وهمية للعقدتين (i) و (k) مقدارها  $u_{I(i)}$  و  $u_{I(k)}$  يكون العمل الخارجي الوهمي :

$$\delta \Pi_a = F^{I(i)} \delta u_{I(i)} + F^{I(k)} \delta u_{I(k)} = \delta u_{I(p)} F^{I(p)} \quad (4.28)$$

مبدأ الانتقالات الوهمية يقتضي أن يكون العمل للنحز مساويا لعمل القوى الداخلية .

$$\delta u_{I(p)} F^{I(p)} = \delta u_{I(p)} k^{I(p)I(q)} u_{I(q)} \quad (4.29)$$

و منه نحصل على العلاقة (4.26). بعد تقييم طاقة التشوه الداخلية في المحاور الإحداثية الخاصة سوف يجري تقييم الحد للمثل لعمل القوى الخارجية المحورية الموزعة على طول العناصر المنتهية

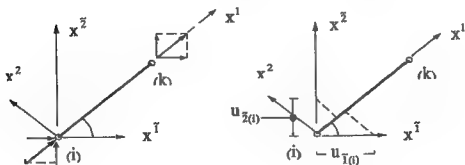
لتحويلها إلى محولات مكافئة مركزة على العقد . بافتراض أن  $\bar{n}^1$  تابع القوة المحورية الموزعة  
معي عنه بالتابع للإحداثي  $x^1$   $\bar{n}^1 = \bar{n}^1(x^1)$  عندها يكون العمل الخارجي لهذه القوة :

$$\Pi_s = \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) u_{1(p)} dx^1 = \left( \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) N^{(p)} dx^1 \right) u_{1(p)} = \bar{f}^{1(p)} u_{1(p)} \quad (4.30)$$

حيث  $\bar{f}^{1(p)}$  القوة المركزة على العقدتين (i),(k) من عنصر منتهي و المكافئة للقوى المحورية  
الموزعة و هي تفصيلياً :

$$\bar{f}^{1(p)} = \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) N^{(p)} dx^1 = \left[ \frac{\int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) (1 - \frac{x^1}{\ell}) dx^1}{\int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1} \right] \quad (4.31)$$

تم حتى الآن إيجاد مصفوفة القساوة و بالتالي قوى المقطع الطرفية و القوى للمركزة على العقد  
المكافئة للقوى الموزعة في المحاور الإحداثية المنطقية على محور العنصر و بناء على ذلك  
فالمعادلات السابقة في الفقرات 3-1, 3-2, 3-3 سارية للمفعول بالنسبة لحالة الجوائز الشبكية  
للمستوية و الفراغية على السواء . قبل تجميع هذه القوى و كتابة معادلات التوازن على العقد  
لا بد من نسب هذه التقادير إلى جملة عاود إحداثية عامة .



شكل 4-11- قوى المقطع الطرفية في المحاور  
الإحداثية العامة و الخاصة

شكل 4-10- العلاقة بين انتقالات العقد  
في المحاور الإحداثية العامة و الخاصة

#### 4-4- عنصر منتهي لجائز شبكي مستوي :

#### 4-4-1- تحويل مصفوفة القساوة من المحاور الإحداثية الخاصة إلى المحاور الإحداثية العامة :

بالنظر إلى الشكل (10-4) نجد أن انتقال العقدة (i) بمقدار  $u_{\bar{1}(i)}$  باتجاه  $x^1$  و  $u_{\bar{2}(i)}$  باتجاه  $x^2$  يؤدي إلى انتقالها باتجاه  $x^1$  ( مع اعتبار  $k$  ثابتة ) بالمقدار :

$$u_{1(i)} = u_{\bar{1}(i)} \cos \alpha + u_{\bar{2}(i)} \sin \alpha \quad (4.32)$$

و كذلك الأمر بالنسبة للعقدة  $k$  :

$$u_{1(k)} = u_{\bar{1}(k)} \cos \alpha + u_{\bar{2}(k)} \sin \alpha \quad (4.33)$$

بتجميع هاتين العلاقتين بالشكل المصفوفي نحصل على :

$$\begin{bmatrix} u_{1(i)} \\ u_{1(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\bar{1}(i)} \\ u_{\bar{2}(i)} \\ u_{\bar{1}(k)} \\ u_{\bar{2}(k)} \end{bmatrix}$$

$$u_{1(p)} = T_1^T u_{\bar{1}(p)} ; \quad \bar{x} = x^1, x^2 \quad (4.34)$$

و تصبح طاقة التشوه الداخلي بدلالة شعاع الانتقالات  $u_{\bar{1}(p)}$  المنسوب إلى جملة المحاور الإحداثية العامة بالشكل :

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} u_{\bar{1}(p)}^T T_1^T k^{1(p)(q)} T_1 u_{\bar{1}(q)} = \frac{1}{2} u_{\bar{1}(p)}^T k^{\bar{1}(p)(q)} u_{\bar{1}(q)} \quad (4.35)$$

و المنشور المصفوفي لهذا الجداء هو :

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{\bar{1}(i)} u_{\bar{2}(i)} u_{\bar{1}(k)} u_{\bar{2}(k)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ & & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ & & & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\bar{1}(i)} \\ u_{\bar{2}(i)} \\ u_{\bar{1}(k)} \\ u_{\bar{2}(k)} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

المصفوفة المربعة السابقة تمثل مصفوفة القساوة لعنصر منتهي لجائر شبكي في المحاور الإحداثية العامة .

#### 2-4-4- شعاع الحمولات الخارجية في المحاور الإحداثية العامة :

يتم تحويل شعاع الحمولات الخارجية المركزة على العقد و المكافئة للحمولات الموزعة ضمن العناصر أيضا بتقييم العمل الخارجي (4.30) بدلالة شعاع الانتقالات  $u_{\bar{r}(p)}$  المنسوب إلى جملة المحاور الإحداثية العامة . و ذلك بتعويض العلاقة (4.34) في العلاقة (4.30) فنحصل على :

$$\Pi_a = \bar{f}^{(p)} T_1^T u_{\bar{r}(p)} \quad (4.37)$$

و الشكل المفصل لهذه العلاقة هو :

$$\Pi_a = \begin{bmatrix} u_{\bar{r}(l)} & u_{\bar{z}(l)} & u_{\bar{r}(k)} & u_{\bar{z}(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \int_0^l \bar{n}^{-1}(x^1) (1 - \frac{x^1}{\ell}) dx^1 \\ \sin \alpha \int_0^l \bar{n}^{-1}(x^1) (1 - \frac{x^1}{\ell}) dx^1 \\ \cos \alpha \int_0^l \bar{n}^{-1}(x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1 \\ \sin \alpha \int_0^l \bar{n}^{-1}(x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

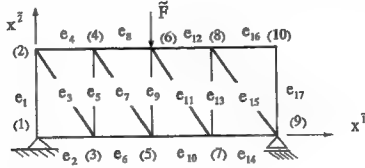
أو :

$$\Pi_a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{\bar{r}(l)} & u_{\bar{z}(l)} & u_{\bar{r}(k)} & u_{\bar{z}(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}^{(l)} \cos \alpha \\ \bar{f}^{(l)} \sin \alpha \\ \bar{f}^{(k)} \cos \alpha \\ \bar{f}^{(k)} \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

و هو ما يمكن استنتاجه مباشرة من الشكل 4-11 . بعد تحويل مصفوفات القساوة للعنصر و أشعة الحمولات المكافئة للحمولات الموزعة إلى المحاور الإحداثية العامة يمكن أن يتم الجمع

لتشكيل المعادلات الجبرية الخطية العامة لكامل المنشأ و التي تحوي انتقالات العقد كمجاهيل ، فالطاقة الكامنة للمنشأ تأخذ بصيغتين القيم المحسوبة للطاقة الداخلية والخارجية (4.37) . (4.35) بدلالة الانتقالات المنسوبة إلى المحاور الإحداثية العامة في العلاقة (4.8) الشكل :

$$\Pi = \sum_e \left( \frac{1}{2} u_{\bar{z}(p)} T_1^T k^{(p)(q)} T_1^T u_{\bar{z}(q)} - \bar{f}^{(p)} T_1^T u_{\bar{z}(q)} \right) - \sum_m \bar{F}^T u_{\bar{z}(m)} \quad (4.40)$$



شكل 4-12 : ترقيم عقد جاذب شبكي

حيث تم تحويل الحد الأخير على غرار الحد قبل الأخير إلى المحاور الإحداثية العامة . بعد إجراء الجمع على كامل عناصر المنشأ و تشكيل مصفوفة القساوة العامة بتجميع شعاع الانتقالات ليصبح ممثلاً على كامل عقد المنشأ نحصل على :

$$\Pi = \frac{1}{2} u_{\bar{z}(L)} k^{\bar{z}(L)\bar{z}(N)} u_{\bar{z}(N)} - \bar{f}^{\bar{z}(L)} u_{\bar{z}(L)} \quad (4.41)$$

حيث (L) , (N) قرينتان متحولتان على كامل عقد المنشأ.

بأخذ المتغير الأول للطاقة الناتجة و ملاحظة تناظر مصفوفة القساوة العامة و إخراج  $\delta u_{\bar{z}(L)}$  كعامل مشترك خارج قوسين ينتج :

$$\delta u_{\bar{z}(L)} (k^{\bar{z}(L)\bar{z}(N)} u_{\bar{z}(N)} - \bar{f}^{\bar{z}(L)}) = 0 \quad (4.42)$$

و باعتبار  $\delta u_{\bar{z}(L)}$  عشوائية تكون العلاقة (4.42) مكافئة للصفر إذا و فقط إذا كان :

$$k^{\bar{z}(L)\bar{z}(N)} u_{\bar{z}(N)} - \bar{f}^{\bar{z}(L)} = 0 \quad (4.43)$$

هذه المعادلات جبرية خطية تحوي شعاع الانتقالات لكل عقد المنشأ  $u_{\tilde{\pi}(N)}$  كمجهول ، أما  $\tilde{\ell}(L)\tilde{\pi}(N)$  فهي مصفوفة القساوة العامة و هي مصفوفة مربعة متناظرة و شاذة ،  $\tilde{\ell}(L)$  شعاع الحمولات الخارجية على كامل عقد المنشأ . تصبح هذه المعادلات قابلة للحل بعد تعويض الشروط الطرفية للانتقالات (2,39) فيها و نستعرض بناء المعادلات العامة على الجائز الشبكي المبين في الشكل (4-12) .

يتم البدء بترقيم عقد الجائز الشبكي بحيث يكون الفارق بين أي عقدتين متجاورتين أقل ما يمكن ، ثم ترقيم عناصر المنشأ و يمكن أن يكون هذا الترقيم اختياريا دون مراعاة أية شروط. تشكل بعدها مصفوفة القساوة العامة والتي تحوي  $20 \times 20 = \tilde{\pi}(N) \times \tilde{\ell}(L)$  عنصرا بتجميع مصفوفات العناصر بعد حسابها وتحويلها إلى جملة الماخور الإحداثية العامة. تتألف مصفوفة القساوة لعنصر جائز شبكي مستوي من  $4 \times 4$  عنصرا وتحتوي هذه المصفوفة على أربع مصفوفات جزئية كل منها  $2 \times 2$  عنصرا وهي تمثل كما رأينا القوى الطرفية التي تنشأ في عقدة ما نتيجة واحدة الانتقالات في العقدة نفسها أو في عقدة أخرى. وقبل إضافة مصفوفة العنصر إلى مصفوفة القساوة العامة نجزأ هذه الأولى إلى مصفوفات جزئية حيث تضاف كل مصفوفة جزئية في مكانها المناسب في المصفوفة العامة. فمثلا مصفوفة العنصر  $e_8$  والذي يملك العقد (6)، (4) تحتوي على المصفوفات الجزئية  $k_{e_8}^{(6)(6)}$ ،  $k_{e_8}^{(6)(4)}$ ،  $k_{e_8}^{(4)(6)}$ ،  $k_{e_8}^{(4)(4)}$  والتي ستكتب رموزها  $k_{e_8}^{66}$ ،  $k_{e_8}^{64}$ ،  $k_{e_8}^{46}$ ،  $k_{e_8}^{44}$  اختصارا ، نجد أنها أضيفت على الشكل التالي:

المصفوفة الجزئية  $k_{e_8}^{44}$  أضيفت في السطور  $4 \times 2$  والأعمدة  $4 \times 2$  للمصفوفة العامة.

المصفوفة الجزئية  $k_{e_8}^{46}$  أضيفت في السطور  $4 \times 2$  والأعمدة  $6 \times 2$  للمصفوفة العامة.

المصفوفة الجزئية  $k_{e_8}^{64}$  أضيفت في السطور  $6 \times 2$  والأعمدة  $4 \times 2$  للمصفوفة العامة.

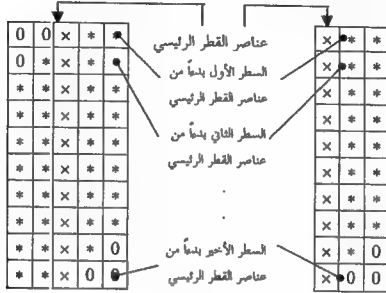
المصفوفة الجزئية  $k_{e_8}^{66}$  أضيفت في السطور  $6 \times 2$  والأعمدة  $6 \times 2$  للمصفوفة العامة.

وهكذا يتم بتجميع مصفوفات العناصر جميعها بنفس الأسلوب. ويجري تجميع أشعة الانتقالات لعقد المنشأ في شعاع عام يحتوي على  $\tilde{\pi}(N) = 20$  عنصرا وهو يمثل مجاميل جملة المعادلات الخطية النهائية. وكذلك الأمر بالنسبة لأشعة الحمولات الخارجية المركزة على العقد حيث تجمع في شعاع عام يحوي على  $\tilde{\ell}(L) = 20$  عنصرا وهو يمثل الطرف الثاني لجملة المعادلات الجبرية. بعد هذه الإجراءات نحصل على جملة المعادلات التالية:





يترقم مناسب لعقد المنشأ كما هو الحال في الشكل (4-12) تأخذ مصفوفة التساوية العامة شكلاً شريطياً لأعظم فرق بين رقمي عقدتين متجاورتين مضافاً إليه واحد .



شكل 4-14 : اختزان كامل المصفوفة

بضعف عرض الشريط - واحد

شكل 4-13 : اختزان نصف المصفوفة

بعرض الشريط فقط

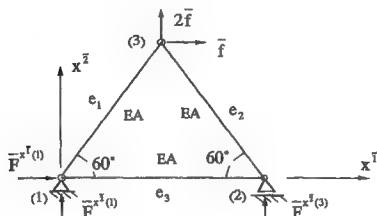
وهذا ما يسدي فائدة كبيرة أثناء استخدام الحاسوب لحل جملة المعادلات الخطية ، إذ يمكن الاستغناء عن العمليات الصغرية . و يتم الاختزان باستبعاد العناصر الصغرية و ترتيب عناصر القطر الرئيسي في عمود واحد تحت بعضها البعض كما في الشكلين (4-13) , (4-14) . من المعلوم أن طرق حل المعادلات الجبرية الخطية تنضوي تحت مجموعتين . المجموعة الأولى و تسمى الطرق المباشرة و التي يتم فيها الحل بشكل مباشر كخوارزميات غاوس للمصفوفات غير المتناظرة و خوارزميات غاوس المعدلة للمصفوفات المتناظرة و طريقة شولسكي للمصفوفات المتناظرة . و يجري اختزان المصفوفة بكاملها أي بضعف عرض الشريط منقوصاً منه واحد شكل (4-14) أثناء استخدام خوارزميات غاوس للمصفوفات غير المتناظرة و اختزان نصف المصفوفة شكل (4-13) للخوارزميات الأخرى . المجموعة الثانية و تسمى

الطرق غير المباشرة أو طرق التقريب المتتالي نذكر منها - طريقة التدرجات المترافقة (conjugate Gradient CG) و طريقة أخرى مطوّرة عن السابقة و تعرف بـ preconditioned Conjugate Gradient PCG) و بعض الطرق التي تعتمد التقريب المتتالي لا تحتاج إلى تشكيل مصفوفة القساوة العامة لكل المنشأ و إنما لعقدة ما و العقد الأخرى المتصلة معها . و على القارئ العودة إلى كتب الرياضيات المختصة بمعالجة طرق حل المعادلات الجبرية الخطية لتلبية متطلباته في هذا المجال . بنتيجة حل جملة المعادلات الجبرية الخطية نحصل على انتقالات عقد المنشأ في المحاور الإحداثية العامة . و بما أن قيم التأثير كالانتقالات ضمن العنصر و التشوهات و الإجهادات قد فرضت في جملة إحداثيات خاصة فلا بد قبل التمكن من حساب هذه القيم من تحويل انتقالات العقد إلى المحاور الإحداثية الخاصة . و هنا يبدأ الطريق العكسي لحساباتنا ، نعود إلى كل عنصر ابتداء من العنصر الأول و نحول انتقالات العقد المحددة له من المحاور الإحداثية العامة إلى المحاور الإحداثية الخاصة باستخدام العلاقة (4.34) ، بعدها نستطيع حساب انتقال أي نقطة ضمن العنصر باستخدام العلاقة (4.19) و التشوهات في أي نقطة وفق العلاقة (4.22) . و بناء على ذلك نستطيع حساب الإجهاد في أي نقطة ضمن العنصر باستخدام قانون المادة و قوى المقطع بإجراء تكامل الإجهادات على سطح المقطع والمثال التالي سوف يوضح كل الخطوات النظرية السابقة :

#### مثال 4-1:

المطلوب حساب الجانز الشبكي المولف من ثلاثة قضبان متساوية الصلابة و التي تشكل مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه  $l$  و معرض في قمته إلى القوة الأفقية  $\bar{F}$  و الشاقولية  $2\bar{F}$  . ينصح عادة بتوجيه المحاور الإحداثية الخاصة للقضبان من العقدة الأدنى إلى العقدة الأعلى فمحور الخاص للقصيب  $e_1$  يتجه من العقدة (1) باتجاه العقدة (2) . بعد فرض محاور الإحداثيات الخاصة و العامة تبقى الخطوة الأولى في الحل إيجاد مصفوفات القساوة للعناصر وللمنشأ .

تقاس الزاوية بين المحاور الإحداثية العامة والخاصة بتدوير الأولى باتجاه موجب حتى تنطبق على الأخيرة . والاتجاه الموجب يتحدد وفق قاعدة اليد اليمنى .



شكل م 1-4 : الجانز الشبكي ، المحاور الإحداثية ، التحميل

مصفوفة القساوة للعنصر  $e_1$  :

وفق ما ورد أعلاه تكون الزاوية  $\alpha = 60^\circ$  و  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$k_{e_1} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

وللعنصر  $e_2$  تكون الزاوية  $\alpha = 300^\circ$  و  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

$$k_{e_2} = \frac{EA}{\ell} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}$$

أما العنصر الثالث فزاويته  $\alpha$  مساوية للصفر و  $\sin \alpha = 0$  و  $\cos \alpha = 1$

$$k_{e_3} = \frac{EA}{\ell} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

بجمع مصفوفات القساورة و كتابة جملة المعادلات الخطية للمسألة نحصل على الجملة التالية :

$$\begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} \frac{EA}{\ell} \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{2}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{6}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{x^T(1)} \\ u_{x^T(2)} \\ u_{x^T(3)} \\ u_{x^T(4)} \\ u_{x^T(5)} \\ u_{x^T(6)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{F}^{x^T(1)} \\ \bar{F}^{x^T(2)} \\ \bar{f} \\ 2\bar{f} \\ 0 \\ \bar{F}^{x^T(6)} \end{vmatrix}$$

يلاحظ أن ردود الأفعال  $\bar{F}^{x^T(1)}$ ,  $\bar{F}^{x^T(2)}$ ,  $\bar{F}^{x^T(3)}$  في المسندين (1) و(3) على التوالي قد اعتبرت وكأنها قوى خارجية مؤثرة على الجملعة الإنشائية. الشروط الطرفية تقتضي بأن ينعدم الانتقالين الأفقي والساقولي في المسند (1) والانتقال الشاقولي في المسند (3) أي :

$$u_{x^T(1)} = \bar{u}_{x^T(1)} = 0$$

$$u_{x^T(2)} = \bar{u}_{x^T(2)} = 0$$

$$u_{x^T(3)} = \bar{u}_{x^T(3)} = 0$$

نحصل على جملة المعادلات التي تحكم المسألة بحذف السطر الذي يحوي القيمة الصفرية للانتقال والعمود المماثل له . و الأسطر و الأعمدة المحذوفة قد رمزت بنجمة \* أما جملة المعادلات للانتقالات المجهولة فهي المتبقية بعد الحذف و هي :

$$\frac{EA}{\ell} \begin{vmatrix} \frac{2}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{6}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{x^T(2)} \\ u_{x^T(2)} \\ u_{x^T(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{f} \\ 2\bar{f} \\ 0 \end{vmatrix}$$

و بحلها نحصل على الانتقالات المجهولة للعقد :

$$\begin{vmatrix} u_{x^T(2)} \\ u_{x^T(2)} \\ u_{x^T(3)} \end{vmatrix} = \frac{\bar{f}\ell}{EA} \begin{vmatrix} 1.961 \\ 1.356 \\ -0.077 \end{vmatrix}$$

و المعادلات الثلاثة المتبقية من مجموعة المعادلات أي :

$$\frac{EA}{\ell} \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{x^T(2)} \\ u_{x^T(2)} \\ u_{x^T(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{F}^{x^T(1)} \\ \bar{F}^{x^T(1)} \\ \bar{F}^{x^T(3)} \end{vmatrix}$$

تعطي ردود الأفعال بعد حساب الانتقالات المجهولة .

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}^{x^1(1)} \\ \bar{F}^{x^1(2)} \\ \bar{F}^{x^1(3)} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}\ell \\ \bar{f}\ell \\ -0.077 \end{Bmatrix} = -\bar{f} \begin{Bmatrix} 1.961 \\ 1.356 \\ 0.134 \end{Bmatrix}$$

لحساب قيم التأثير في نقطة ما p من العنصر  $e_1$  يجب حساب انتقال عقدتيه الطرفيتين (1) و (2) في المحاور الإحداثية الخاصة . يجري التحويل وفق العلاقة (4.34) .

$$\begin{Bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^1(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}\ell \\ 0 \\ \bar{f}\ell \\ 1.961 \\ 1.356 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{f}\ell}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2.155 \end{Bmatrix}$$

و حال الانتقال في العنصر  $e_1$  يمثلها التابع :

$$u_{x^1} = \frac{\bar{f}\ell}{EA} \left[ 1 - \frac{x^1}{\ell} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 2.155 \end{Bmatrix}$$

و حالة التشوهات تتمثل بالتابع :

$$\epsilon_{11} = \frac{\bar{f}\ell}{EA} \left[ -\frac{1}{\ell} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 2.155 \end{Bmatrix} = u_{x^1, x^1}$$

أما حالة الإجهادات فتتمثل بالتابع :

$$\sigma^{11} = \frac{\bar{f}}{A} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2.155 \end{Bmatrix}$$

و قوى المقطع نحصل عليها بتكامل تابع الإجهادات على سطح مقطع القضيب :

$$N^{x^1} = \int_A \sigma^{11} dA = \sigma^{11} \cdot A = \bar{f} \cdot 1 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2.155 \end{array} \right|$$

نحصل على الانتقال  $u_{x^1}$  أو قيم التشوه  $\varepsilon_{11}$  أو قيم الإجهاد  $\sigma^{11}$  و قوة المقطع  $N^{x^1}$  في نقطة ما بتعويض إحداثيات هذه النقطة في التوابع الآتية الذكر. فمثلاً عند النقطة (1) يكون  $x^1 = 0$  وعند النقطة (2) يكون  $x^1 = l$ . بشكل مشابه نعالج حسابات قيم التأسيس في العنصرين الآخرين فنحصل على قيمة قوة للمقطع  $N^{x^1} = 0.155\bar{f}$  للعنصر  $e_2$  و  $N^{x^1} = -0.077\bar{f}$  للعنصر  $e_3$ . وعلى القارئ التأكد من صحة الحسابات الأخيرة بإجراءها و إجراء توازن عقد المنشأ. جدير بالذكر هنا أن إشارات قيم التوابع  $u_{x^1}, \varepsilon_{11}, \sigma^{11}, N^{x^1}$  التي نحصل عليها في الحل النهائي هي تلك المتبعة في مقاومة المواد و ذلك نظراً لاستخدام العلاقات المعروفة في مقاومة المواد أثناء اشتقاق الطريقة. بينما لاحظنا أن قوى المقطع الطرفية الموجبة و القوى الخارجية الموجبة في طريقة العناصر المنتهية هي تلك التي تتفق باتجاهها مع الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية المتخذة. بعد هذا المثال التفصيلي لتطبيق طريقة العناصر المنتهية - نمودج الانتقالات - نتقل إلى معالجة هذه الطريقة و ذلك عندما يتعرض المنشأ لمؤثرات خارجية أخرى كالتأثيرات الحرارية و حالة هبوط المساند أو وجود انتقالات مسبقة لبعض العقد.

#### 4-4-3- حالة التأثيرات الحرارية :

نفرض أن قضيباً من الجائز الشبكي أو عدة قضبان قد تعرضوا لتغير في درجة الحرارة مقداره  $\Delta t$  فالتشوه الحاصل نتيجة ذلك :

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \alpha_1 \Delta t \quad (4.45)$$

حيث  $\alpha_1$  معامل التمدد لمادة القضيب .

إذا اعتبرنا أن التشوه الحراري الحاصل تشوه مسبق . يكون التشوه الكلي مساو للتشوه الداخلي الحاصل نتيجة تأثير القوى الداخلية  $\varepsilon_{11}$  مطروحاً منه التشوه المسبق الحاصل نتيجة



التأثيرات الحرارية  $\bar{\epsilon}_{11}$  . أي أن التشوه الكلي هو  $(\epsilon_{11} - \bar{\epsilon}_{11})$  . مبدأ الطاقة الكامنة لحالة الجوائز الشبكية (4.8) يأخذ بوجود التأثيرات الحرارية الشكل :

$$\Pi = \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{2} \int_0^L (\epsilon_{11} - \bar{\epsilon}_{11}) EA (\epsilon_{11} - \bar{\epsilon}_{11}) dx^1 - \int_0^L \bar{n}^1 u_1 dx^1 \right) - \sum_m \bar{F}^{(m)} u_{1(m)} \quad (4.46)$$

$$\delta \Pi = 0 \quad (4.47)$$

و المتغير الأول للطاقة الكامنة (4.46) مع اعتبار متغير القيمة المعلومة  $\bar{\epsilon}_{11}$  مساو للصفر  $(\delta \bar{\epsilon}_{11} = 0)$  هو :

$$\delta \Pi = \sum_{\alpha} \left( \int_0^L \epsilon_{11} EA \delta \epsilon_{11} dx^1 - \int_0^L \bar{\epsilon}_{11} EA \delta \epsilon_{11} dx^1 - \int_0^L \delta u_1 \bar{n}^1 dx^1 \right) - \sum_m \bar{F}^{(m)} \delta u_{1(m)} = 0 \quad (4.48)$$

الحد الأول كما نعلم هو متغير طاقة التشوه الداخلية و الحد الثالث هو متغير طاقة القوى الخارجية الموزعة محولة إلى قوى مركزة على العقد مكافئة للسابقة ، و الحد الأخير يمثل متغير طاقة القوى الخارجية المركزة على العقد . و بتقييم الحد الثاني نحصل على متغير طاقة القوى الناتجة عن التأثيرات الحرارية . و لا بد لإجراء هذا التقييم من تحديد تابع التشوه الحراري  $\bar{\epsilon}_{11}$  في نقطة ما لا على التبعين  $p(x^1)$  من القضيب المعرض للتأثيرات الحرارية . و سندرس الحالة التي يتعرض فيها قضيب ما لتأثيرات حرارية غير منتظمة . فلنفرض أن قضيب ما عقده  $(i), (k)$  قد تعرضت لتأثيرات حرارية تتمثل بتغير درجة حرارة العقدة (i) بمقدار  $t_{(i)}$  و تغير درجة حرارة العقدة (k) بمقدار  $t_{(k)}$  . لتحديد تابع التأثيرات الحرارية ضمن العنصر يمكن أن نستخدم خوارزميات مشابهة لتلك التي حدد فيها تابع الانتقالات ضمن العنصر بدلالة انتقالات العقد (الانتقال من المعادلة (4.12) إلى (4.19)). بفترض تغير خطي لتابع التأثيرات الحرارية لحصل على :

$$\Delta t = \left| 1 - \frac{x^1}{\ell} - \frac{x^1}{\ell} \frac{t_{(i)}}{t_{(k)}} \right| \quad (4.49)$$

أو باستخدام الكتابة بالقرائن

$$\Delta t = N^{(q)} t_{(q)} : (q) = (i), (k) \quad (4.50)$$

يصبح تابع التشوهات الحرارية

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \alpha N^{(q)} t_{(q)} \quad (4.51)$$

و بالتالي الحد الممثل للتأثيرات الحرارية .

$$\delta \Pi_1 = \int_0^l \bar{\varepsilon}_{11} EA \delta \varepsilon_{11} dx^1 = \alpha t_{(q)} \left( \int_0^l N^{(q)} EA N^{(p),x^1} dx^1 \right) \delta u_{1(p)} = \delta u_{1(p)} \bar{t}^{1(p)} \quad (4.52)$$

و هو بالتفصيل :

$$\delta \Pi_1 = \left| \delta u_{1(i)} \quad \delta u_{1(k)} \right| \alpha \frac{EA}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_{(i)} \\ t_{(k)} \end{vmatrix} \quad (4.53)$$

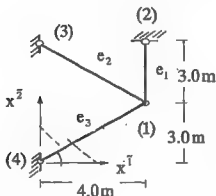
و شعاع القوى الحرارية  $\bar{t}^{1(p)}$  يجب إضافته إلى الحملات الخارجية بعد تحويله إلى الجملة الإحداثية العامة بطريقة مماثلة للشعاع  $\bar{f}^{1(p)}$  . و فيما يلي سنقدم مثلاً على معالجة التأثيرات الحرارية .

مثال 4-2 :

لدينا الجائز الشبكي المبين في الشكل م 4-2 ، معامل مرونة قضبانها جميعها  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$  و سطوح مقطعها  $A = 20 \text{ cm}^2$  و معامل تمددها الطولي  $\alpha = 0,000012$  يطلب إيجاد القوى في القضبان و الناتجة من ارتفاع درجة حرارة العقدة (4) بمقدار  $50^\circ \text{C}$  .

نوجه محاور القضبان الخاصة كما اتفق عليه سابقاً من رقم العقدة الأدنى إلى رقم العقدة الأعلى بعد هذا نستطيع حساب القوى الحرارية  $\bar{t}^{1(p)}$  المؤثرة في عقدي القضيب وفق العلاقة (4.53) . وهنا نشير أيضاً إلى أن قياس الزاوية بين المحاور الإحداثية العامة والمحاور الإحداثية الخاصة يتم مثلما استنبطت علاقات التحويل (4.34) أي بتدوير المحاور الإحداثية العامة بعكس عقارب الساعة (بالإنجاء للموجب للمحور الثالث) لتتطبق على المحاور الإحداثية الخاصة.

بالطبع ليس هذا إلا اصطلاح ويمكن قياس الزاوية بالشكل الذي نريده ولكن علينا عندها استخراج علاقات التحويل وفق اصطلاح الإشارة المتعمد.  
لنعد الآن إلى حساب القوى الحرارية في العنصر  $e_3$ :



شكل م 2-4: الجوائز الشبكي، الأبعاد، الخواص الهندسية، التحميل الحراري

$$\bar{t}^p = \alpha_t \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{(1)} \\ t_{(4)} \end{bmatrix} = \frac{0.000012 \cdot 21000.50}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -315 \\ 315 \end{bmatrix}$$

الجملة الإحداثية العامة تصنع مع الجملة الإحداثية الخاصة الزاوية  $\alpha = 216.87$  وبالتساوي  
الجملة الإحداثية العامة الموافقة  $\bar{t}^{(p)}$  في المحاور الإحداثية العامة الموافقة  
 $\sin \alpha = -0.6, \cos \alpha = -0.8$   
للسابقة هي:

$$\bar{t}^{(p)} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -315 \\ 315 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 189 \\ -252 \\ -189 \end{bmatrix}$$

قوة أفقية وضالوية  
 مؤثرة في العقدة (1)  
 قوة أفقية وضالوية  
 مؤثرة في العقدة (4)

بعد حساب مصفوفة القساوة للعناصر وجمعها إلى مصفوفة القساوة العامة ومعالجة الشروط  
الطرفية نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

$$EA \begin{vmatrix} 0.256 & 0 \\ 0 & 0.477 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\bar{1}(0)} \\ u_{\bar{2}(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 252 \\ 189 \end{Bmatrix}$$

بحل هاتين المعادلتين نجد انتقالات العقدة (1) في الجملة الإحداثية العامة .

$$u_{\bar{1}(0)} = \frac{984.375}{EA}; u_{\bar{2}(0)} = \frac{396.226}{EA}$$

لحساب القوى في القضيبين  $e_1, e_2$  نجري الحسابات الإعتيادية كما في المثال السابق إذ نحول أولا انتقالات عقدتيهما إلى المحاور الإحداثية الخاصة ثم نجرى الحسابات الروتينية للتشوهات وبعدها قوى المقطع . و سنكتفي هنا بإعطاء النتيجة :

$$N^{x^1}_{e_1} = -132 \text{ kN}; N^{x^1}_{e_2} = 109.95$$

و القوة في القضيب  $e_1$  ضاغطة و في  $e_2$  شادة . لحساب القوة في القضيب  $e_3$  نحسب أولا انتقالات عقدتيه في المحاور الإحداثية الخاصة .

$$\begin{Bmatrix} u_{1(0)} \\ u_{1(4)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{vmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & -0.6 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 984.375 \\ 396.226 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} -1025.236 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

والحالة الإجهادية في القضيب يعر عنها قانون المادة (4.5) لحالة التشوهات الحرارية المسببة .

$$\sigma^{11} = E(\varepsilon_{11} - \bar{\varepsilon}_{11})$$

و القوة في القضيب  $e_3$  هي:

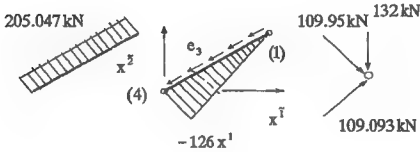
$$N^{x^1} = EA(\varepsilon_{11} - \bar{\varepsilon}_{11}) = EA\varepsilon_{11} - \alpha EA \Delta t$$

و هي بعد التعويض :

$$N^{x^1} = \left| -\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \right| \begin{Bmatrix} -1025.236 \\ 0 \end{Bmatrix} - 0.000012 \times 21000 \times 50 \left| 1 - \frac{x^1}{5} \quad \frac{x^1}{5} \right| \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 205.047 - 126x^1$$

و هذا التابع يعر عن تغير القوة في القضيب  $e_3$  . حيث يبين هذا التابع أن تغير هذه القوة خطي. لنحسب الآن المحصلة الوسطية لهذه القوة و ذلك من اجل إجراء توازن العقدة (1) للتحقق من صحة الحل . القوة الوسطية في القضيب هي محصلة القوى المؤثرة عليه و تتألف من القوة الثابتة و مقدارها :

205.047 و القوة الموزعة  $-126x^1$  وقيمة القوة الموزعة عند العقدة (1) حيث  $x^1 = 0$  هي 0 و عند العقدة (4) حيث  $x^1 = 5$  هي  $-126 \times 5$  و الشدة الموزعة على الطول  $-126 \text{ kN/m}$  و محصلتها هي مساحة المثلث الممثل لها أي  $-\frac{126 \times 5}{2}$  و بالتالي محصلة القوة في التقصيب  $e_3 = 205.047 - 315 = -109.093$  و تصبح العقدة (1) متوازنة تحت تأثير مجموعة القوى المؤثرة عليها (شكل م 4-2-ب) .



شكل م 4-2-ب توازن عقدة الجوائز الشبكي

#### 4-4-4 حالة هبوط المساند

بغية إتمام الموضوع بشكل متكامل نود الآن معالجة حالات أخرى كهبوط المساند أو حالة وجود انتقالات مسبقة و حالة وجود نوابض عند مساند الجوائز الشبكية . و لنبدأ الآن بحالة حصول انتقالات مسبقة  $\bar{u}_{\bar{z}(L)}$  في بعض عقد الجوائز الشبكي. في هذه الحالة تأخذ الطاقة الكامنة المقيمة في العلاقة (4.40) الشكل :

$$\Pi = \frac{1}{2} (u_{\bar{z}(L)} + \bar{u}_{\bar{z}(L)}) k^{\bar{z}(L)\bar{z}(N)} (u_{\bar{z}(N)} + \bar{u}_{\bar{z}(N)}) - \bar{f}^{\bar{z}(N)} (u_{\bar{z}(L)} + \bar{u}_{\bar{z}(L)}) \quad (4.54)$$

عدد عقد المنشأ  $L, N = 1, 2, 3, \dots$

و المتغير الأول للطاقة الكامنة هو :

$$\delta \Pi = \delta u_{\bar{r}(L)} [k^{\bar{r}(L)\bar{u}(N)} (u_{\bar{u}(N)} + \bar{u}_{\bar{u}(N)}) - \bar{f}^{\bar{u}(N)}] = 0 \quad (4.55)$$

و ذلك لأن المتغير الأول للانتقالات للمعلومة مسبقا مساو للصفر ( $\delta \bar{u} = 0$ ) و بالتالي جملة المعادلات الخطية لهذه الحالة :

$$k^{\bar{r}(L)\bar{u}(N)} u_{\bar{u}(N)} = \bar{f}^{\bar{u}(N)} - k^{\bar{r}(L)\bar{u}(N)} \bar{u}_{\bar{u}(N)} \quad (4.56)$$

الحد الأخير من الطرف الثاني و هو جنداء مصفوفة القساوة العامة في شعاع الانتقالات المسبقة يمثل تأثير هبوط المساند . و المثال التالي يوضح عدديا معالجة هذه الحالة :

مثال 4-3:

يطلب في حالة الجائز الشبكي السابق إيجاد القوى في قضبانه في حالة هبوط المسند (2) مقننار (1cm) في اتجاه المحور  $x^2$  .

بعد حساب مصفوفة القساوة العامة و ترتيب شعاع الانتقالات المسبقة لكل عقد الجائز الشبكي نستطيع حساب حملتهما :

$$k^{\bar{r}(L)\bar{u}(N)} \bar{u}_{\bar{u}(N)} = EA \times$$

0.256	0	0	0	-0.126	0.096	-0.128	-0.096	0	0
	0.477	0	-0.333	0.096	-0.072	-0.096	-0.072	0	0.333
		0	0	0	0	0	0	0	0
			0.333	0	0	0	0	-1	-0.333
				0.128	-0.96	0	0	0	0
					0.072	0	0	0	0
						0.128	0.096	0	0
							0.072	0	0

وتصبح جملة المعادلات بعد معالجة الشروط الطرفية كما يلي:

$$EA \begin{vmatrix} 0.256 & 0 \\ 0 & -0.477 \end{vmatrix} = EA \begin{vmatrix} 0 \\ -0.333 \end{vmatrix}$$

و انتقالات العقدة (1) هي :

$$\begin{vmatrix} u_{x^i(1)} \\ u_{x^i(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -0.698 \end{vmatrix} \text{cm}$$

تتبع الآن الطريقة الإعتيادية في حسابات القوى في قضبان الجائر الشبكي و نحسبها الآن مفصلة للقضيب  $e_1$  : الانتقالات في الجملة الإحداثية الخاصة لمعدني القضيب  $e_1$  هي :

$$\begin{vmatrix} u_{x^i(1)} \\ u_{x^i(2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -0.698 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.698 \\ -1 \end{vmatrix} \text{cm}$$

و القوة في القضيب  $e_1$  :

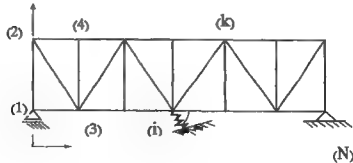
$$N^{e_1} = 21000 \times 20 \left[ -\frac{1}{300} \quad \frac{1}{300} \right] \begin{vmatrix} -0.698 \\ -1 \end{vmatrix} = -1057 \text{kN}$$

بحساب القوى في القضيبين الآخرين نحصل على :

$$N^{e_1}_{e_2} = 879.48; N^{e_1}_{e_3} = -879.48$$

و قوى العقدة (4) متوازنة تحت تأثير القوى السابقة .

#### 5-4-4- معالجة الرباض :



شكل 4-15: حالة نابض يحل برلوية  $\alpha$  في العقدة (i) من جائر شبكي

في حالة وجود نابض ثابت صلابته  $c^{l(p)l(q)} = c; (p), (q) = (i)$  يسند عقدة ما (i) من جائر شبكي تكون الطاقة الداخلية للتولدة عن قوى مرونة النابض و الناتجة عن انتقال العقدة (i) باتجاه محور النابض بمقدار  $(u_1(i))$  مساوية لما يلي :

$$\Pi_s = \frac{1}{2} u_{1(p)} c^{l(p)l(q)} u_{1(q)} ; (p), (q) = (i) \quad (4.57)$$

هذه الطاقة يجب تحويلها بدلالة انتقالات العقدة (i) باتجاهات المحاور الإحداثية العامة . و التحويل يتم بنفس الأسلوب المتبع في العلاقة (4.35) حيث ينتج :

$$\Pi_s = \frac{1}{2} u_{\tilde{z}(p)} T_1^T c^{l(p)l(q)} T_1^H u_{\tilde{z}(q)} ; \tilde{z}, \tilde{n} = \tilde{1}, \tilde{2} \quad (4.58)$$

و الشكل التفصيلي لهذه العلاقة هو :

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \left| u_{\tilde{z}(p)} \quad u_{\tilde{z}(q)} \right| c \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{\tilde{1}(i)} \\ u_{\tilde{2}(i)} \end{vmatrix} \quad (4.59)$$

و هذه العلاقة يجب إضافتها إلى الطاقة الكامنة . ويتم هذا بإضافة المصفوفة  $T_1^T c^{l(p)l(q)} T_1^H$  في المكان الموافق للعقدة (i) في جملة المعادلة الخطية كما توضح العلاقة (4.61) . أما القوة انحرورية في النابض فيتم حسابها بعد حساب الانتقالات المجهولة بحساب انتقال العقدة (i) باتجاه محور النابض وفق علاقة التحويل (4.34) و من ثم تطبيق العلاقة المعروفة :

$$N^s = -c u_1 \quad (4.60)$$

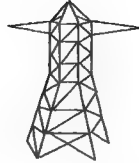
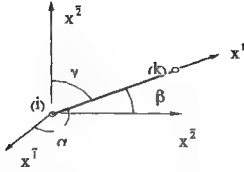
و أخيرا تكون جملة للمعادلات الخطية في حالة وجود نابض في العقدة (i) بالشكل :



$$\begin{bmatrix}
+ c \cos^2 \alpha & + c \cos \alpha \sin \alpha \\
+ c \cos \alpha \sin \alpha & + c \sin^2 \alpha
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\bar{x}^1(i) \\
\bar{x}^2(i)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\bar{x}^1(i) \\
\bar{x}^2(i)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\bar{x}^1(N) \\
\bar{x}^2(N)
\end{bmatrix}
\quad (4.61)$$

#### 4-5- عنصر منتهي لجائز شبكي فراغي :

لنقتطع من جائز شبكي فراغي (شكل 4-17) عنصر منتهي عقده ذات الرقم الأدنى (i) و ذات الرقم الأعلى (k). عادة يوجه محور القضيب  $x^1$  من العقدة (i) إلى العقدة (k) كما أسلفنا و يحدد عادة القضيب بإعطاء إحداثيات عقديه في الجملة الإحداثية العامة وتكن إحداثيات العقدة i  $(\bar{x}^1(i), \bar{x}^2(i), \bar{x}^3(i))$  و إحداثيات العقدة k  $(\bar{x}^1(k), \bar{x}^2(k), \bar{x}^3(k))$ . إن زوايا الاتجاه للعنصر (i),(k) هي تلك التي يضعها مستقيم مواز للقضيب مار من مبدأ الإحداثيات و موجه بالاتجاه من (i) إلى (k) مع الاتجاهات الموجبة للمحاور الإحداثية الثلاثة  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ . بفرض أن الزوايا مع المحاور  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$  هي على الترتيب  $\alpha, \beta, \gamma$  يمكن حساب تجميعات هذه الزوايا من مبادئ الهندسة التحليلية :



شكل 4-17- جوائز شبكي فراغي

شكل 4-18- عنصر من جوائز شبكي فراغي .

المحاور الإحداثية الخاصة و العامة

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x_1^{(k)} - x_1^{(i)}}{\ell} \\ \cos \beta &= \frac{x_2^{(k)} - x_2^{(i)}}{\ell} \\ \cos \gamma &= \frac{x_3^{(k)} - x_3^{(i)}}{\ell}\end{aligned}\quad (4.62)$$

حيث  $\ell$  طول القضيب (k) و يساوي :

$$\ell = \sqrt{(x_1^{(k)} - x_1^{(i)})^2 + (x_2^{(k)} - x_2^{(i)})^2 + (x_3^{(k)} - x_3^{(i)})^2} \quad (4.63)$$

علافا للحالة المستوية يحتوي شعاع الانتقالات في المحاور الإحداثية العامة على ثلاث مركبات . وكذلك شعاع القوى الخارجية و هي مركبة في اتجاه كل محور من المحاور الإحداثية العامة . للحصول على مصفوفة القساوة العامة يجب تقييم طاقة التشوه الداخلي (4.23) المنسوبة إلى الجزمة الإحداثية الخاصة للعنصر في جملة المحاور الإحداثية العامة . إن انتقال العقدة (i) بمقدار  $u_{1(i)}$  باتجاه  $x_1$  و  $u_{2(i)}$  باتجاه  $x_2$  و  $u_{3(i)}$  باتجاه  $x_3$  يؤدي إلى انتقالها باتجاه محاور القضيب  $x_1$  مع اعتبار  $k$  ثابتة بالمقدار :

$$u_{1(i)} = u_{1(i)} \cos \alpha + u_{2(i)} \cos \beta + u_{3(i)} \cos \gamma \quad (4.64)$$

و كذلك الحال بالنسبة للعقدة k :

$$u_{1(k)} = u_{1(k)} \cos \alpha + u_{2(k)} \cos \beta + u_{3(k)} \cos \gamma \quad (4.65)$$

وباستخدام الكتابة بالقرائن نستطيع التعبير عن العلاقتين السابقتين بالعلاقة :

$$u_{1(p)} = T_1^T u_{7(p)} \quad (4.66)$$

و بالتحويل السابق تأخذ طاقة التشوه الداخلي شكلا مشابها للعلاقة (4.35) وهو :

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} u_{7(p)}^T T_1^T k^{I(p)I(q)} T_1^T u_{7(q)} \quad (4.67)$$

حيث :

$$u_{7(p)} = [u_{7(i)} u_{7(l)} u_{7(l)} u_{7(k)} u_{7(k)} u_{7(k)}] \quad (4.68)$$

شعاع انتقالات العقدتين (i) و (k) في المحاور الإحداثية العامة. وعليه تصبح مصفوفة القسوة لعنصر حائز شبكي فراغي محولة إلى المحاور الإحداثية العامة كما يلي:

$$T_1^T k^{I(p)I(q)} T_1^T = \frac{EA}{\ell}$$

$\cos^2 \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \gamma$	$-\cos^2 \alpha$	$-\cos \alpha \cos \beta$	$-\cos \alpha \cos \gamma$
$\cos \alpha \cos \beta$	$\cos^2 \beta$	$\cos \beta \cos \gamma$	$-\cos \alpha \cos \beta$	$-\cos^2 \beta$	$-\cos \beta \cos \gamma$
$\cos \alpha \cos \gamma$	$\cos \beta \cos \gamma$	$\cos^2 \gamma$	$-\cos \alpha \cos \gamma$	$-\cos \beta \cos \gamma$	$-\cos^2 \gamma$
$-\cos^2 \alpha$	$-\cos \alpha \cos \beta$	$-\cos \alpha \cos \gamma$	$\cos^2 \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \gamma$
$-\cos \alpha \cos \beta$	$-\cos^2 \beta$	$-\cos \beta \cos \gamma$	$\cos \alpha \cos \beta$	$\cos^2 \beta$	$\cos \beta \cos \gamma$
$-\cos \alpha \cos \gamma$	$-\cos \beta \cos \gamma$	$-\cos^2 \gamma$	$\cos \alpha \cos \gamma$	$\cos \beta \cos \gamma$	$\cos^2 \gamma$

(4.69)

أما شعاع الحملات الخارجية المركزة على العقد و المكافئة للحمولات الموزعة ضمن العناصر فيتم تحويلها بتقييم العمل الخارجي (4.30) المنسوب إلى الجملة الإحداثية الخاصة بدلالة شعاع الانتقالات (4.68) المنسوب إلى جملة المحاور الإحداثية العامة و ذلك بتعويض العلاقة (4.66) في العلاقة (4.30) فنحصل على :

$$\Pi_2 = \bar{f}^{I(p)} T_1^T u_{7(p)} \quad (4.70)$$

و هذه العلاقة بالتفصيل :

$$\Pi_s = \left[ \begin{array}{c} \cos \alpha \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) \left(1 - \frac{x^1}{\ell}\right) dx^1 \\ \cos \beta \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) \left(1 - \frac{x^1}{\ell}\right) dx^1 \\ \cos \gamma \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) \left(1 - \frac{x^1}{\ell}\right) dx^1 \\ \cos \alpha \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1 \\ \cos \beta \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1 \\ \cos \gamma \int_0^{\ell} \bar{n}^1(x^1) \frac{x^1}{\ell} dx^1 \end{array} \right] \quad (4.71)$$

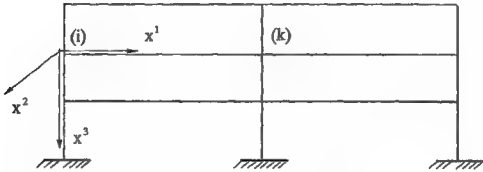
بعد تحويل كافة المؤثرات إلى الجملة الإحداثية العامة يمكن الجمع على كامل المنشأ بشكل مشابه لما ورد في حالة الجوائز الشبكية المستوية مع الفارق البسيط أنه في حالة الجوائز الفراغية تكون المصفوفة الجزئية الخاصة بكل عقدة مؤلفة من  $3 \times 3$  عنصرا عوضا عن كونها في الحالة للمستوية مؤلفة من  $2 \times 2$  عنصرا .

المصادر العلمية :

1. Rothe, A .  
Stabstatik für Bauingenieure  
VEB verlag für Bauwesen , Berlin 1984 .
2. Bochmann , F .  
Statik im Bauwesen , Bd . I , II und III  
VEB Verlag für Bauwesen , Berlin 1977 .
3. Winkler , j ; Aurich , H .  
Technische Mechanik  
VEB Fachbuch verlag , Leipzig 1987 .

## 5- معالجة الإطارات المستوية والقragية بطريقة العناصر المنتهية

يقصد بالمنشآت الإطارية تلك المنشآت الناتجة من الاتصال الصلد لقضبان مقاومة لعزوم الانعطاف مع بعضها البعض (شكل 5-1). هذا الاتصال الصلد يسمح بنقل عزوم الانعطاف وقوى القص والقوى الناطمية. تصنف الإطارات عادةً تحت زمر معينة فنجد منها الإطارات الوحيدة الطابق والإطارات متعددة الطوابق، والإطارات الموثقة والإطارات المتمفصلة ... إلخ. وسوف نتعالج هذه الإطارات وفق الافتراضات الكلاسيكية المعروفة لنظرية الإطارات، وهذه الافتراضات هي:



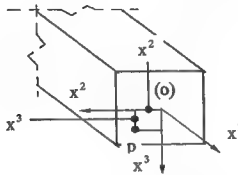
شكل 5-1: منشأ إطاري متعدد الطبقات

- أ- طول قضيب الإطار كبير جداً بالنسبة لأبعاد مقطعه.
- ب- تأثير القوى القاصصة ضئيل بالنسبة لتأثير عزوم الانعطاف بحيث يمكن إهماله.
- ج- محور القضيب مستقيم أو أنه عني المنحنا بسيطاً جداً بحيث يمكن اعتباره مستقيماً.
- د- تؤثر الحملات الخارجية في مستوي يمر بمحور القضيب وفصله المشترك مع مقطع القضيب يمثل محور عطالة رئيسي للمقطع وهو بنفس الوقت محور تناظر للمقطع.
- هـ- يفترض أن مادة القضيب مرنة ومتجانسة ويسري فيها مفعول قانون هوك.
- و- المقاطع للمستوية قبل التشوه تبقى مستوية بعد التشوه (نظرية التشوه الأمثل للمقاطع). كما يفترض أن المقاطع المستوية العمودية على محور القضيب قبل التشوه تبقى عمودية على محور القضيب التشوه بعد التشوه (نظرية برنولي وNavier).

ز- القوى الخارجية المؤثرة عمودياً على محور القضيب يمكن اعتبارها وكأنها موزعة بانتظام على كامل ارتفاع المقطع.

ى- المقاطع المعرضة لعزوم فتل تشوه فقط بدورها حول محور مزدوجة عزوم الفتل، وتحافظ على شكلها وكأنها شريحة صلبة. بينما يمكن لنقاط المقطع أن تنتقل باتجاه محور المزدوجة لكن تسابع انتقالها ليس متعلقاً بالإحداثي المستقل للتطبيق على محور المزدوجة ( فرضية سانت فينانت Sant Venant).

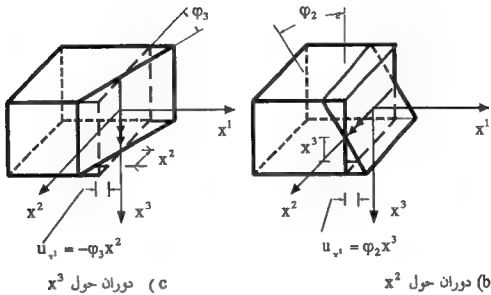
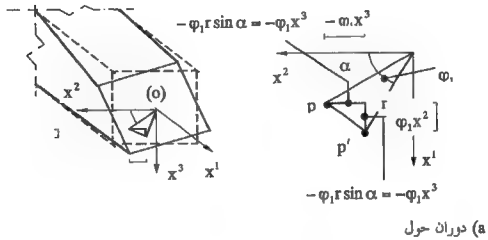
#### 5-1- تخفيض عدد مجاهيل نظرية المرونة:



شكل 5-2: قضيب مقطوع من إطار فراغي

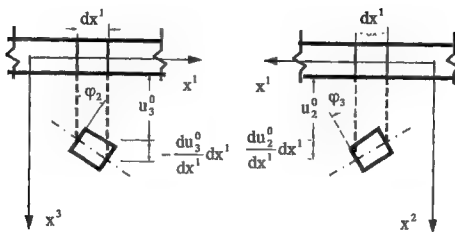
لنستعرض الآن مجاهيل نظرية المرونة لحالة قضيب مقطوع من إطار فراغي (شكل 5-2) يحقق الافتراضات السابقة. لتنسب القضيب للمقطع من الإطار إلى جملة محاور إحداثية محلية متعامدة نظامية  $(x^1, x^2, x^3)$  بحيث ينطبق محور القضيب على المحور  $x^1$ . لتحديد الحالة الانتقالية لمقطع القضيب يجب تحديد انتقالات كل نقطة منه  $P$  في اتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة وهي على التوالي  $(u_1, u_2, u_3)$  وهذه هي نفسها المجاهيل التي تحدد تابع الانتقالات لجسم فراغي. وباعتبار  $P$  نقطة ما لأعلى التعيين من نقاط المقطع، يكون عدد المجاهيل اللازمة لتحديد المقطع للتشوه باعتباره جزءاً من جسم فراغي لانهائي. ولكن باستخدام الافتراضات التسهيلية السابقة يمكن صياغة انتقال النقطة  $P$  بدلالة انتقالات نقطة مركز ثقل المقطع ودورانات المقطع حول المحاور الإحداثية الثلاثة.

لنفترض أن انتقالات نقطة مركز ثقل المقطع باتجاه المحاور  $x^1, x^2, x^3$  هي على التوالي  $u_1^0, u_2^0, u_3^0$  ، وأن دورانات المقطع حول المحاور نفسها هي على التوالي  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  ، نجد باعتماد فرضية المقاطع المستوية والرجوع إلى الشكل (3-5) أن:



شكل 3-5: دورانات المقطع حول المحاور الاحداثية

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1^0 - \varphi_3 \cdot x^2 + \varphi_2 \cdot x^3 \\
u_2 &= u_2^0 - \varphi_1 \cdot x^3 \\
u_3 &= u_3^0 - \varphi_1 \cdot x^2
\end{aligned}
\tag{5.1}$$



شكل 4-5: فرضية برنولي: المقاطع العمودية على محور القضيب قبل التشوه تبقى عمودية على محور القضيب المشوه بعد التشوه. ١) انتقال تفاضلي باتجاه  $x^2$  . ب) انتقال تفاضلي باتجاه  $x^3$ . باعتبار أن مشتقات الانتقالات صغيرة، يمكن إلباس ظل الزاوية بالزاوية نفسها ويكون الدوران عند تغير الانتقالات في عنصر تفاضلي طوله  $dx^1$  حول  $x^2$  مكافئاً لـ  $(-\frac{du_3^0}{dx^1})$  ، والإشارة السالبة تعني أن الانتقال للموجب يؤدي إلى زاوية دوران سالبة. وهذه الزاوية مكافئة (وفق نظرية برنولي) لزاوية دوران المقطع حول  $x^2$  (الزاويتين متساويتين بالاعتماد شكل 4-5) أي:

$$\varphi_2 = (-\frac{du_3^0}{dx^1})
\tag{5.2}$$



وبشكل مماثل نجد أن:

$$\varphi_3 = \left( -\frac{du_2^0}{dx_1} \right) \quad (5.3)$$

وبالتالي بعد افتراض التسهيلات السابقة يمكن التعبير عن انتقالات المقطع في أية نقطة منه بتحديد

شعاع الانتقالات:

$$u_i^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

أما بالنسبة لموتر التشوهات فتتقلص لتحتوي فقط على التشوه الناطمي  $\varepsilon_{11}$  والتشوهات العرضية  $\varepsilon_{12}$  ،  $\varepsilon_{13}$  ، أما التشوهات المتبقية فهي وفق الفرضية (1) مهملة أي:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{32} = 0 \quad (5.5)$$

ويكون جزء موثر التشوهات الذي يجب تحديده هو:

$$\varepsilon_{1i} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

والإجهادات الحاصلة طبقاً لذلك والتي يجب تعيينها تلخص في جزء موثر الإجهادات

$$\sigma^{1i} = \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{13} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

أما الإجهادات المتبقية فتعتبر مهملة ( الفرضية 1 ):

$$\sigma^{22} = \sigma^{33} = \sigma^{23} = 0 \quad (5.8)$$

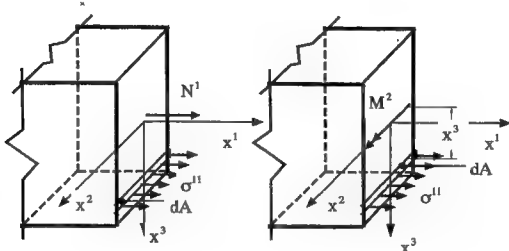
يلجأ عادةً إلى استخدام قوى المقطع أثناء كتابة معادلات التوازن على عنصر تفاضلي مقطوع من قضيب الإطار. وقرى المقطع المستقلة التي يجب تحديدها ممثلة بالقوة الناطمية  $N$  والتي تتمثل

بتكامل الإجهادات الناطمية على سطح المقطع ( شكل 5-5-5 )

$$N^1 = \int_A \sigma^{11} dA \quad (5.9)$$

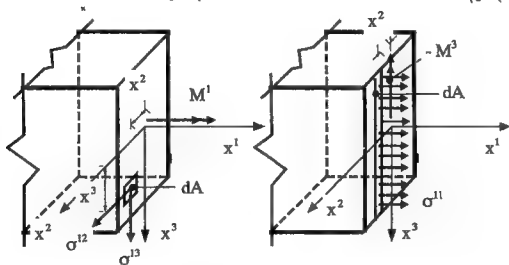
وعزم الانعطاف حول المحور  $x^2$  وهو تكامل عزم القوة التفاضلية  $\sigma^{11} dA$  حول المحور  $x^2$  على كامل سطح المقطع (شكل 5-5-ب)

$$M^2 = \int_A \sigma^{11} x^3 dA \quad (5.10)$$



(a) القوة الناعمية

(b) عزم الانعطاف  $M^2$



(d) عزم الفتل  $M^1$

(c) عزم الانعطاف  $M^3$

شكل 5-5: قوى المقطع المستقلة في مقطع من قضيب إطارى.

وعزم الانعطاف حول المحور  $x^3$  هو تكامل عزم القوى التفاضلية  $\sigma^{11} dA$  حول المحور  $x^3$  على سطح المقطع (شكل 5-5-5)

$$M^3 = - \int_A \sigma^{11} x^2 dA \quad (5.11)$$

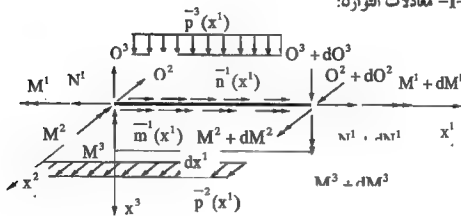
أما عزم القتل حول المحور  $x^1$  فهو تكامل عزم القوتين التفاضليتين  $\sigma^{12} dA$  و  $\sigma^{13} dA$  حول المحور  $x^1$  على كامل سطح المقطع (شكل 5-5-5)

$$M^1 = \int_A (-\sigma^{12} x^3 + \sigma^{13} x^2) dA \quad (5.12)$$

أما قوى المقطع المتبقية كقوتي القص  $Q^2$  باتجاه المحور  $x^2$  و  $Q^3$  باتجاه المحور  $x^3$  فهي قوى يمكن حسابها من عزم المقطع السابقة كما سنرى عند كتابة معادلات التوازن. وفيما يلي سنستعرض معادلات نظرية المرونة لحالة قضيب إطارى فراغى.

## 5-2-2 معادلات نظرية المرونة:

### 5-2-1 معادلات التوازن:



شكل 5-6: عنصر تفاضلي مقطوع من قضيب إطارى فراغى (قوى المقطع، الحمولات الخارجية).

لنقتطع من قضيب إطارى فراغى عنصرا تفاضليا بطول  $dx^1$  تؤثر عليه القوى الخارجية الموزعة  $\bar{n}^1(x^1)$ ,  $\bar{p}^2(x^1)$ ,  $\bar{p}^3(x^1)$  وعزوم الفتل الخارجية الموزعة  $\bar{m}^1(x^1)$ . نختار الاتجاه الموجب لقوى المقطع  $N^1, Q^2, Q^3, M^1, M^2, M^3$  كما في مقاومة المواد معاكسة للمحاور الإحداثية في جزء المقطع اليساري، ولذلك تكون الاتجاهات الموجبة لنفس القوى بعد تزايدها بمقدار تفاضلي على جزء المقطع اليميني موافقة للمحاور الإحداثية حسب قانون التأثير المتبادل. ومعادلات توازن مساطق القوى باتجاه المحاور الإحداثية  $x^1, x^2, x^3$  هي على التوالي:

$$\begin{aligned} N^1 + dN^1 - N^1 + \bar{n}^1(x^1).dx^1 &= 0 \\ Q^2 + dQ^2 - Q^2 + \bar{p}^2(x^1).dx^1 &= 0 \\ Q^3 + dQ^3 - Q^3 + \bar{p}^3(x^1).dx^1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

ومعادلات توازن العزوم حول المحاور الإحداثية  $x^1, x^2, x^3$  في نقطة مركز العنصر التفاضلي:

$$\begin{aligned} M^1 + dM^1 - M^1 + \bar{m}^1(x^1).dx^1 &= 0 \\ M^2 + dM^2 - M^2 - Q^3 \frac{dx^1}{2} - (Q^3 + dQ^3) \cdot \frac{dx^1}{2} &= 0 \\ M^3 + dM^3 - M^3 + Q^2 \frac{dx^1}{2} + (Q^2 + dQ^2) \cdot \frac{dx^1}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

ويإهمال الحدود التي تحتوي على مربعات التفاضل نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} \frac{dN^1}{dx^1} &= -\bar{n}^1(x^1) & \frac{dM^1}{dx^1} &= -\bar{m}^1(x^1) \\ \frac{dQ^2}{dx^1} &= -\bar{p}^2(x^1) & \frac{dM^2}{dx^1} &= Q^3 \\ \frac{dQ^3}{dx^1} &= -\bar{p}^3(x^1) & \frac{dM^3}{dx^1} &= -Q^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

باشتقاق المعادلتين الخامسة والسادسة من العلاقة السابقة بالنسبة لـ  $x^1$  وتعويض المعادلتين الثانية والثالثة على الترتيب في المعادلتين الناتجتين عن الاشتقاق نحصل على معادلات التوازن التالية لقوى المقطع المستقلة:

$$\begin{aligned}\frac{dN^1}{dx^1} &= -\bar{n}^1(x^1) \\ \frac{d^2M^2}{(dx^1)^2} &= -\bar{p}^3(x^1) \\ \frac{d^2M^3}{(dx^1)^2} &= \bar{p}^2(x^1)\end{aligned}\tag{5.16}$$

$$\frac{dM^1}{dx^1} = -\bar{m}^1(x^1)$$

## 5-2-2- علاقات التشوهات - الانتقالات:

تمثل علاقات التشوهات - الانتقالات للحالة المدروسة بثلاث علاقات نحدد جزء متوردة التشوهات (5.6) وهي لحالة السلوك الهندسي الخطي كمايلي:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \\ \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \right)\end{aligned}\tag{5.17}$$

نكتب الآن التشوه الناظمي  $\varepsilon_{11}$  بدلالة عناصر شعاع الانتقالات (5.4). فنجد باستخدام المعادلة الأولى من العلاقات (5.1) والمعادلات (5.2), (5.3) أن:

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1^0}{dx^1} - x^2 \frac{d^2 u_2^0}{(dx^1)^2} - x^3 \frac{d^2 u_3^0}{(dx^1)^2} \quad (5.18)$$

التشوهات العرضية  $\varepsilon_{12}$  و  $\varepsilon_{13}$  نكتب بدلالة عناصر شعاع الانتقالات (5.4) وذلك باستخدام كافة معادلات العلاقات (5.1) والمعادلات (5.2), (5.3) بالشكل:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( -\varphi_3 + \frac{du_0^2}{dx^1} - x^3 \cdot \frac{d\varphi_1}{dx^1} \right) = \frac{1}{2} \left( -x^3 \cdot \frac{d\varphi_1}{dx^1} \right) \quad (5.19)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \varphi_2 + \frac{du_0^2}{dx^1} + x^2 \cdot \frac{d\varphi_1}{dx^1} \right) = \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \frac{d\varphi_1}{dx^1} \right) \quad (5.20)$$

بتجميع العلاقات (5.18), (5.19), (5.20) نحصل على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^3 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x^3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1^0}{dx^1} \\ -\frac{d^2 u_3^0}{(dx^1)^2} \\ \frac{d^2 u_2^0}{(dx^1)^2} \\ \frac{d\varphi_1}{dx^1} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$\varepsilon_{ij} = \bar{x}_{ij} \chi_j$$

حيث  $\chi_j$  شعاع مشتقات انتقالات نقطة مركز ثقل المقطع.

### 5-2-3- قانون السلوك:

تمثل علاقات الإجهادات-التشوهات للحالة المدروسة بثلاث علاقات أيضا تحدد جزءا متوترة الإجهادات (5.7) وهي لحالة السلوك الفيزيائي الخطي:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{1+\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$\sigma^i = C^{111} \varepsilon_{1j}$$

### 5-2-4- علاقات قوى المقطع - الانتقالات:

نحصل على قوى المقطع-الانتقالات بإجراء تكاملات الإجهادات (5.10), (5.11), (5.12) (5.9) بعد تعريض جزء متوترة الإجهادات في العلاقات (5.22) بمكافئة من العلاقات (5.21) وهي كالتالي:

$$\begin{bmatrix} N^1 \\ M^2 \\ M^3 \\ M^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du^0_1}{dx^1} \\ \frac{d^2u^0_3}{(dx^1)^2} \\ \frac{d^2u^0_2}{(dx^1)^2} \\ \frac{d\varphi_1}{dx^1} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$M^i = E^i \chi_j$$

حيث  $I_2, I_3$  عزوم عطالة المقطع حول المحورين  $x^2, x^3$  على التوالي و  $I_D$  عزم العطالة القطبي له:

$$I_2 = \int_A (x^3)^2 dA$$

$$I_3 = \int_A (x^2)^2 dA \quad (5.24)$$

$$I_D = \int_A [(x^2)^2 + (x^3)^2] dA = \int_A r^2 dA$$

والتكاملات:

$$\int_A x^2 dA = \int_A x^3 dA = 0 \quad (5.25)$$

معلومة لافتراضنا منذ البداية أن المحاور  $x^2, x^3$  هي محاور تناظر أو محاور العطالة الرئيسية للمقطع. أما المعامل  $G$  فهو المعامل المعروف في مقاومة المواد كمعامل القص للمادة ويساوي:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5.26)$$

## 5-2-5- المعادلات التفاضلية للمسألة :

تشكل المعادلات التفاضلية التي تحكم المسألة المطروحة بتطبيق الاشتقاقات (5.16) على قوى المقطع من العلاقات (5.23) فنحصل على المعادلات التفاضلية التالية:

$$EA \frac{d^2 u_1^0}{(dx^1)^2} = -n^{-1} (x^1)$$



$$EI_2 \frac{d^4 u_3^0}{(dx^1)^4} = \bar{p}^3(x^1) \quad (5.27)$$

$$EI_3 \frac{d^4 u_2^0}{(dx^1)^4} = \bar{p}^2(x^1)$$

$$GI_D \frac{d^2 \varphi_1}{(dx^1)^2} = -\bar{m}^1(x^1)$$

وهنا نلاحظ أن المعادلات التفاضلية تحوي في ضمنها كل علاقات الوسط الإنشائي أي علاقات التشوهات-الانتقالات وقانون السلوك ومعادلات التوازن. والحلول الكلاسيكية تعتمد على إيجاد حلول هذه المعادلات وتحديد ثوابت الحل بحيث تتحقق الشروط الطرفية الكينماتيكية والميكانيكية. ونحن هنا لسنا بصدد دراسة مثل هذه الحلول وإنما ندرس الطرق المتغيرة في إيجاد حلول هذه المعادلات.

### 5-3- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري:

بعد هذا الاستعراض المفصل للمجاهيم الستاتيكية والكينماتيكية المؤثرة في حالة قضيب إيطاري مقطوع من منشأ إيطاري نستطيع كتابة مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري لحالة الإطارات الفراغية تحت الشروط المفترضة أثناء استعراض المسألة، وذلك بتبديل موتر التشوهات العامة  $\varepsilon_{ij}$  بجزئها  $\varepsilon_{ij}$  المحدد في العلاقة (5.6) ومعاملات الصلابة العامة  $C^{ijkl}$  بجزئها  $C^{ijkl}$  وبعد أخذ الافتراضات الواردة في بداية هذا الفصل بعين الاعتبار يأخذ مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري بالشكل:

$$\pi = \sum_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} c^{mj} \varepsilon_{ij} \right) dv - \int_0^{l-1} \bar{p}^i u_i dl - \sum_m \bar{F}^{(p)} u_i^{(p)} \quad (5.28)$$

$$\delta\pi = 0 \quad (5.29)$$

حيث:

$\sum_p$  : المجموع على كامل عناصر المنشأ الإطاري.

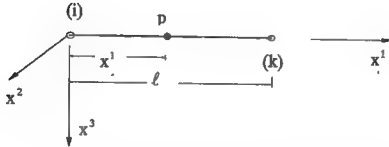
$\bar{F}^{(p)}$  : القوة الخارجية المركزة في الاتجاه  $l$  للمحور الإحداثي (عما فيها القوة الخارجية المركزة) و  $m$  هي العقدة التي تؤثر فيها القوة.

$\sum_m$  : المجموع على العقد المحملة بقوة مركزة أو بعزم مركز.

$u_{l(p)}^0$  : شعاع انتقالات العقدة المحملة بقوة خارجية (انتقالات ودورانات).

إن الحد الأول من العلاقة (5.28) يمثل طاقة التشوه الداخلي والحد الثاني منها يمثل عمل القوى الخارجية الموزعة أما الحد الأخير فيمثل عمل القوى الخارجية المركزة والعزم الخارجية المركزة.

#### 5-4- عنصر منتهي إطاري فراغي-نموذج الانتقالات:



شكل 5-7 : قضيب من إطار فراغي كعنصر منتهي ، الحملة الإحداثية

لنقطع من منشأ إطاري عنصراً منتهياً طوله  $l$  وعقدتيه الطرفيتين (i)، (k) (شكل 5-7). لكل عقدة من عقدتيه ست درجات حرية وهي ثلاثة انتقالات في اتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة وثلاثة دورانات حولها. إذا عدد الثوابت الاختيارية التي يمكن تعيينها هي اثنا عشر ثابتاً اختيارياً وهو ما يجب أن يحتويه التابع التقريبي للانتقالات. نفترض التابع التقريبي لشعاع الانتقالات (5.4) لنقطة من محاور الجائز تبعد عن العقدة (i) بمقدار  $x^1$  بالشكل:

$$\begin{bmatrix} u_2^0 \\ u_2^0 \\ u_2^0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$u_i^0 = x^i \cdot c_n \quad i=1,2,3,4 \quad c_n = c_0, c_1, \quad (5.30)$$

هذه التوابيع يجب أن تعطي انتقالات العقدتين (i), (k) عند تعويض إحداثياتها فيها. بتعميـض  
إحداثيات العقدتين (i), (k) مع مراعاة العلاقات (5.2), (5.3) نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} u_1^0(i) \\ u_2^0(i) \\ u_3^0(i) \\ \varphi_1(i) \\ \varphi_2(i) \\ \varphi_3(i) \\ u_1^0(k) \\ u_2^0(k) \\ u_3^0(k) \\ \varphi_1(k) \\ \varphi_2(k) \\ \varphi_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2l & -3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$u_{l(p)}^0 = A_{l(p)}^n c_n \quad l=1,2,\dots,6 \quad (p)=(i),(k) \quad n=0,1,\dots,11 \quad (5.31)$$

إن ترتيب أسطر المصفوفة للحصول على الثوابت المجهولة غير مناسب لإجراء عملية معكوس مصفوفة ويمكن ترتيبها بشكل مناسب بتبديل الأسطر ببعضها البعض، والأنسب من ذلك تجزئ جملة المعادلات وإيجاد الثوابت كمجموعات فمثلاً  $c_1, c_0$  متعلقة فقط بـ  $u^0_1(k), u^0_1(l)$  والثوابت  $c_2, c_3, c_4, c_5$  متعلقة بـ  $u^0_2(l), \varphi_3(l), u^0_2(k), \varphi_3(k)$  وهكذا. وحل جملة المعادلات بالنسبة للثوابت الاختيارية هو:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l^3} & 0 & \frac{3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{2}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l^2} & 0 & -\frac{2}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & 0 & \frac{2}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l^3} & 0 & -\frac{1}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l^3} & 0 & -\frac{1}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0_1(l) \\ u^0_2(l) \\ u^0_3(l) \\ \varphi_1(l) \\ \varphi_2(l) \\ \varphi_3(l) \\ u^0_1(k) \\ u^0_2(k) \\ u^0_3(k) \\ \varphi_1(k) \\ \varphi_2(k) \\ \varphi_3(k) \end{bmatrix} \\
 c_n &= B^{(p)}_{n \quad u(p)} \quad p=1,2,\dots,6 \quad (p) = (i),(k) \quad n=0,1,\dots,11
 \end{aligned}
 \tag{5.32}$$

نحصل على نوايع الشكل المثلة للنوايع التقريبية المفترضة بتعويض الثوابت الاختيارية من العلاقة السابقة في العلاقة (5.30):

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \varphi_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^4 & 0 & 0 & 0 & h_2^4 & 0 & h_3^4 & 0 & 0 & 0 & h_4^4 \\ 0 & 0 & h_1^4 & 0 & -h_2^4 & 0 & 0 & 0 & h_3^4 & 0 & -h_4^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0(i) \\ u_2^0(i) \\ u_3^0(i) \\ \varphi_1(i) \\ \varphi_2(i) \\ \varphi_3(i) \\ u_1^0(k) \\ u_2^0(k) \\ u_3^0(k) \\ \varphi_1(k) \\ \varphi_2(k) \\ \varphi_3(k) \end{bmatrix}$$

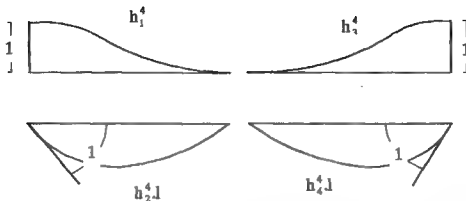
$$u_i^0 = x_i^T B^{(p)} u_{l(p)}$$

$$= N^{(p)}_i u_{l(p)} \quad l=1,2, \dots, 6 \quad (p) = (i), (k)$$

حيث:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= 1 - \frac{x^1}{l} & ; & & h_2^2 &= \frac{x^1}{l} \\ h_1^4 &= 1 - 3\frac{(x^1)^2}{l^2} + 2\frac{(x^1)^3}{l^3} & ; & & h_2^4 &= \frac{x^1}{l} - 2\frac{(x^1)^2}{l^2} + \frac{(x^1)^3}{l^3} \\ h_3^4 &= 3\frac{(x^1)^2}{l^2} - 2\frac{(x^1)^3}{l^3} & ; & & h_4^4 &= -\frac{(x^1)^2}{l^2} + \frac{(x^1)^3}{l^3} \end{aligned} \quad (5.34)$$

وهذه التوابيع معروفة بكثيرات حدود هيرميت (HERMITE) وكثيرا الحدود الأول والثاني هما من المرتبة الثانية وهما ممثلان في الشكل (4-6) أما كثيرات الحدود الأخرى فهي من المرتبة الرابعة (مرتبة كثيرات حدود Hermite) وهي ممثلة في الشكل 5-8.



شكل 5-8: كثيرات حلول Hermite

من الواضح أن هذه التوابع تحقق خاصية كونها مساوية للواحد في العقدة المعتبرة وللصفر في العقد الأخرى.

بتقسيم شعاع مشتقات التوابع التقريبية للاتصالات الوارد في العلاقة (5.21) نجد أن:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1^0}{dx} \\ \frac{du_2^0}{dx} \\ \frac{du_3^0}{dx} \\ \frac{d\varphi_1^0}{dx} \\ \frac{d\varphi_2^0}{dx} \\ \frac{d\varphi_3^0}{dx} \\ \frac{du_1^0}{dx} \\ \frac{du_2^0}{dx} \\ \frac{du_3^0}{dx} \\ \frac{d\varphi_1^0}{dx} \\ \frac{d\varphi_2^0}{dx} \\ \frac{d\varphi_3^0}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^{z'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2^{z'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_1^{q'} & 0 & h_2^{q'} & 0 & 0 & 0 & -h_3^{q'} & 0 & h_4^{q'} & 0 \\ 0 & h_1^{q'} & 0 & 0 & 0 & h_2^{q'} & 0 & h_3^{q'} & 0 & 0 & 0 & h_4^{q'} \\ 0 & 0 & 0 & h_1^{z'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2^{z'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0(x) \\ u_2^0(x) \\ u_3^0(x) \\ \varphi_1^0(x) \\ \varphi_2^0(x) \\ \varphi_3^0(x) \\ u_1^0(x) \\ u_2^0(x) \\ u_3^0(x) \\ \varphi_1^0(x) \\ \varphi_2^0(x) \\ \varphi_3^0(x) \end{bmatrix}$$

$$= Nd_1^{(p)} u_{1(p)}$$

(5.35)

تُحسب موثر التشوهات المختصرة (5.21) لنقطة لاهلى التعيين من قضيب الإطار الفراغى

بتعويض (5.35) في (5.21):

$$\varepsilon_{ij} = \bar{x}_{ij}^t \quad Nd_i^{(p)} \quad u_{l(p)} \quad (5.36)$$

حيث  $\bar{x}_{ij}^t$  هي المصفوفة المعطاة في العلاقة (5.21) وتحتوي على ثلاثة أسطر وأربع أعمدة. يمكن الآن تقييم طاقة التشوه الداخلي من إطار فراغي وهي تساوي:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ij} C^{llj} \varepsilon_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 Nd_r^{(q)} \left[ \int_A (\bar{x}_{ij}^r C^{llj} \bar{x}_{ij}^t) dA \right] Nd_i^{(p)} u_{l(p)} dx^1 \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$= \frac{1}{2} u_{s(q)} \left( \int_0^1 Nd_r^{(q)} E^{rs} Nd_i^{(p)} dx^1 \right) u_{l(p)} \quad (5.37)$$

$$= \frac{1}{2} u_{s(q)} k^{s(q)l(p)} u_{l(p)}$$

حيث:

$$E^{rs} = \int_0^1 \bar{x}_{ij}^r C^{llj} \bar{x}_{ij}^t dA \quad (5.38)$$

مصفوفة تحوي على أربع أسطر وأربع أعمدة وهي مكافئة لمثلثتها في العلاقة (5.23) اما المصفوفة:

$$k^{s(q)l(p)} = \int_0^1 Nd_r^{(q)} E^{rs} Nd_i^{(p)} dx^1 \quad (5.39)$$

فهي مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي. بعد إنجاز الجداء المصفوفي السوارد في العلاقة (5.39) والتكاملات التفصيلية لعناصر المصفوفة الناتجة عن هذا الجداء نحصل على عناصر مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي الإطاري الفراغي .

ومصفوفة القساوة هذه متناظرة وتحتوي على أربعة مصفوفات جزئية، كل منها تحتسوي على  $(6 \times 6)$  عنصراً. ويمكن تفسير عناصرها أيضاً كقوى موافقة لانتقال مساوٍ لواحدة الانتقالات (الانتقالات والدورانات) بشكل مماثل لما ورد في الفقرة (4-3). إذ يكفي أن نعطي لجائز موثوق في عقديته (i), (k), (j) انتقالاً في العقدة (i) باتجاه المحاور  $x^1, x^2, x^3$  ودوراناً حول المحاور نفسها

وحساب قوى الوتاقة في (i),(k) للتأكد من ذلك، وكذلك الأمر بالنسبة للعقدة (k). وتعطى مصفوفة القساوة تفصيلياً كالتالي:

$$K^{stiff} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA \\ 12EI \\ 12EI \\ GI \\ 4EI \\ 4EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K^{s(l)q(l)} & K^{s(l)q(k)} \\ K^{s(k)q(l)} & K^{s(k)q(k)} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

بإيجاز التكاملات:

$$\pi_a = \int_0^1 p u_i^0 dx^1 = \int_0^1 \bar{p} N_i^{l(p)} u_{l(p)} = \bar{f}^{l(p)} u_{l(p)} \quad (5.41)$$

حيث:

$$\bar{f}^{l(p)} = \int_0^1 \bar{p} N_i^{l(p)} dx^1, \bar{p} = \left\{ \begin{matrix} -1 & -2 & -3 & -1 \\ p & p & p & m \end{matrix} \right\} \quad (5.42)$$

نحصل على القوى المركزة على العقد المكافئة للحمولات الموزعة.

$$\bar{f}^{(p)} = \left[ \begin{matrix} -1 & -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & -1 & -2 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ p & p & p & m & -p & p & p & p & p & m & p & -p \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$



وبلاحظ أنها مكافئة للقوى التي تحصل في قضيب موثوق من الطرفين معرض لتأثير الحمولات الخارجية الموزعة. في العلاقات السابقة يجب عدم الخلط بين  $l$  المستخدمة للتعبير عن الطول و  $l$  المستخدمة كقريبة.

قبل الجمع على كامل المنشأ لابد من تحويل تعابير الطاقة السابقة إلى جملة عاود إحداثية عامسة. ولتكن هذه الجملة  $(x^1, x^2, x^3)$  أشعتها الواحدية  $(e_1, e_2, e_3)$ . كما يوضح الشكل (5-7). نسب العنصر المنتهي إلى جملة إحداثية خاصة مركزها في الطرف (i) من العنصر ومحورها  $x^1$  منطبق على محور العنصر واتجاهه الموجب من (i) إلى (k) وبالتالي يمكن حساب مركبات شعاع الوحدة  $e_1$  على هذا المحور. لابد أيضاً لتحديد الجملة الخاصة من تحديد محور آخر وليكن المحور  $x^2$  وذلك إما بإعطاء نقطة واقعة عليه في الاتجاه الموجب وعندها يكون من السهل أيضاً تحديد شعاع الوحدة عليه  $e_2$  أو إعطاء نقطة في المستوى  $x^1 x^2$  في الاتجاه الموجب للمحور  $x^2$  وعندها يجب اللجوء إلى مبادئ الهندسة التحليلية لتحديد شعاع الوحدة  $e_2$ . أما الشعاع الثالث فيتمتع باعتبار الثلاثية  $(e_1, e_2, e_3)$  ثلاثية قائمة ويكون  $(e_3 = e_1 \times e_2)$ . بعد تحديد الجملتين نجري انسحاباً للجملة  $(x^1, x^2, x^3)$  بحيث ينطبق مركزها على مركز المقطع في (i) ومركبات هذا الانسحاب:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(i) \\ x^2 &= x^2(i) \\ x^3 &= x^3(i) \end{aligned} \quad (5.44)$$

يمكن الآن التعبير عن انتقال العقدة (i) في الجملتين بشعاع المكان:

$$\vec{r}(i) = u_{i(0)}^0 e^1 = u_{i(0)}^0 e^T \quad (5.45)$$

حيث  $u_{i(0)}^0$  ،  $u_{i(0)}^0$  انتقالات العقدة (i) باتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة على التوالي في الجملتين الخاصة والعامسة.  $e^1$  هي الأشعة الواحدية لجملتي إحداثيات ضدية منطبقة على الجملتين الأساسيتين الخاصة والعامسة للمعرفتين هنا. بضرب العلاقة (5.45) سلمياً بـ  $e_j$  نحصل على:

$$u_{i(0)}^0 e^1 e_j = u_{i(0)}^0 \delta_j^1 = u_{i(0)}^0 = u_{i(0)}^0 e^T e_j = u_{i(0)}^0 T_j^T \quad (5.46)$$

والعلاقة التفصيلية هي:

$$\begin{bmatrix} u_{1(i)}^0 \\ u_{2(i)}^0 \\ u_{3(i)}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \cdot e_1 & e_2^T \cdot e_1 & e_3^T \cdot e_1 \\ e_1^T \cdot e_2 & e_2^T \cdot e_2 & e_3^T \cdot e_2 \\ e_1^T \cdot e_3 & e_2^T \cdot e_3 & e_3^T \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(i)}^0 \\ u_{2(i)}^0 \\ u_{3(i)}^0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

وفي كثير من المصادر العلمية يتم تحويل الدورانات أيضاً باستخدام نفس مصفوفة التحويل هذه أي:

$$\varphi_{j(i)} = \varphi_{\bar{j}(i)} T_j^T \quad (5.48)$$

وتحويل انتقالات ودورانات العقدة (k) يتم أيضاً باستخدام نفس التحويل السابق. وتصبح طاقة التشوه الداخلي (5.38) بدلالة شعاع الانتقالات في المحاور الإحداثية العامة  $u_{\bar{i}(p)}$ :

$$\pi_i = \frac{1}{2} u_{\bar{i}(q)} T_i^T k^{(q)(p)} T_i^T u_{\bar{i}(p)} \quad (5.49)$$

$$\pi_i = \frac{1}{2} u_{\bar{i}(q)} k^{(q)\bar{i}(p)} u_{\bar{i}(p)}$$

حيث:

$$k^{(q)\bar{i}(p)} = T_i^T k^{(q)(p)} T_i^T \quad (5.50)$$

مصفوفة القساوة في المحاور الإحداثية العامة. وعمل القوى الخارجية المركزة على العقد المكافئة للحمولات الخارجية الموزعة ضمن العنصر يصبح بدلالة شعاع الانتقالات  $u_{\bar{i}(p)}$  مكافئاً لـ:

$$\pi_a = \bar{f}^{i(p)} T_i^T u_{\bar{i}(p)} = \bar{f}^{\bar{i}(p)} u_{\bar{i}(p)} \quad (5.51)$$

حيث:

$$\bar{f}^{\bar{i}(p)} = \bar{f}^{i(p)} T_i^T \quad (5.52)$$

يتم تحويل الحد الأخير من العلاقة (5.28) والموافق لعمل القوى الخارجية المركزة كما في العلاقة (5.51):

$$\bar{f}^{i(p)} u_{i(p)}^0 = \bar{f}^{\bar{i}(p)} T_i^T u_{\bar{i}(p)} = \bar{f}^{\bar{i}(p)} u_{\bar{i}(p)} \quad (5.53)$$

والآن نستطيع الجمع على كامل المنشأ للحصول على الطاقة الكامنة للمنشأ:

$$\pi = \sum_e \left( \frac{1}{2} u_{\bar{i}(q)} k^{(q)\bar{i}(p)} u_{\bar{i}(p)} - \bar{f}^{\bar{i}(p)} u_{\bar{i}(p)} \right) - \sum_m \bar{F}^{\bar{i}(p)} u_{\bar{i}(p)} \quad (5.54)$$

بعد هذا التجميع نحصل على علاقة شبيهة بـ (5.41) وشكلها بعد تجميع القرائن في العلاقة السابقة كالتالي:

$$\pi = \frac{1}{2} u_{T(n)} k^{T(n)} u_{T(n')} - \bar{f}^{T(n)} u_{T(n)}(n), (n'=1,2,3,...) \quad (5.55)$$

حيث  $k^{T(n)}$  مصفوفة القساوة العامة للمنشأ و  $u_{T(n)}$  شعاع الانتقالات لكامل عقد المنشأ. بعد أخذ المتغير الأول ومساواته بالصفر وفق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

$$k^{T(n)} u_{T(n')} = \bar{f}^{T(n)} \quad (5.56)$$

بتعويض الشروط الطرفية للانتقالات وحل المعادلات الناتجة نحصل على شعاع انتقالات العقد المجهولة للمنشأ. بعد ذلك يمكن تحديد حالة التشوهات في أية نقطة من المقطع باستخدام العلائق (5.21)، (5.35) أو الحالة الاجهادية باستخدام (5.22)، (5.21)، (5.35) أو تحديد قوى المقطع باستخدام العلاقة (5.23)، (5.35).

أما بالنسبة لحالة المؤثرات الخارجية الأخرى كالحرارة وهبوط المساند ووجود النوايض فيتم التعامل معها بطريقة مشابهة لتي استعرضت في الفقرة (4-4) بالطبع مع وجود فارق في درجات الحرية إذ أن شعاع الانتقالات هنا يحتوي بالإضافة إلى الانتقالات الدورانات أيضاً.

## 5-5- عنصر منتهي إطاري فراغي - النموذج المجهين:

تنتطق هذه الطريقة كما ذكر في الفصل الثالث من مبدأ الطاقة المتمة المعدل الذي يحوي كتوابع افتراضية على الإجهادات ضمن الوسط للدروس إضافة إلى الانتقالات على جزء السطح الذي تكون فيه الإجهادات معلومة وقد طور هذا المبدأ البروفيسور T. H. H. Piah وطبقه على حل مسائل البلاطات بغية التغلب على متطلبات شروط استمرارية مشتقات توابع الانتقالات الافتراضية على الأطراف الفاصلة بين العناصر المنتهية عند استخدام نموذج الانتقالات.

في هذه الفقرة سيطبق المبدأ السابق على الإطارات الفراغية بغرض تعليمي بحت علماً أن العنصر المطور هنا يحقق نتائج مرضية أكثر بكثير من مثيله نموذج الانتقالات الذي عرض في الفقرة (5-5)

3). إذ أن العنصر نموذج الانتقالات لا يستطيع تجسيد الشكل البياني لتوابع قوى المقطع إذا ما كانت عناصر المنشأ محملة بمحمولات موزعة وتظهر أخطاؤه فادحة في حسابات القوى القاصة والتي قد تصل إلى (50%).

وسوف نستعرض استخدام هذا المبدأ بدءاً من تحويل مبدأ الطاقة المتزنة المعدل (3.78)، (3.79) المعطى في هاتين العلاقتين للجسم الفراغي أو الوسط الإنشائي المستمر إلى الشكل الذي يمكن استخدامه فيه على الوسط المقسم إلى عناصر منتهية وحتى الشكل المناسب للاستخدام على المسائل وحيدة البعد.

### 5-1- الطاقة المتزنة المعدلة لوسط مقسم إلى عناصر منتهية:

يعطى مبدأ الطاقة المتزنة المعدل بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\delta \pi_{eh} = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 S_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 dv - \int_{T^1} T_i^1 \bar{u}_i ds - \int_{T^2} (T_i^1 - \bar{T}_i^1) u_i ds \right] = 0; \quad T^1 = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (5.57)$$

بعد تقسيم الجسم أو الوسط الإنشائي إلى عناصر منتهية يمكن أن نعتبر أن جزء السطح الذي تكون فيه الانتقالات معلومة  $S_{ij}^0$  للعنصر المنتهي مؤلف من مجموع سطحين، السطح الأول " هو السطح الحقيقي " للعنصر  $S_{ij}^0$  والسطح الثاني هو سطح العنصر الطرفي المجاور لعناصر منتهية أخرى  $S_{ij}^{b,c}$  ونعتبر أيضاً أن السطح الذي تكون فيه الإجهادات أو القوى معلومة  $S_{ij}^0$  هو مجموع سطحين السطح الأول هو السطح الحقيقي للعنصر  $S_{ij}^0$  والسطح الثاني هو سطح العنصر الطرفي المجاور لعناصر منتهية أخرى  $S_{ij}^{b,c}$ . عندها يأخذ مبدأ الطاقة المتزنة المعدل للوسط المقسم بعد استخدام الحرف  $p$  للدلالة على القوى الطرفية بدلاً من  $T$  الشكل التالي :

\* استخدام الحرف  $p$  هنا للدلالة على أطراف العنصر المنتهي وليس كقرينة ، ولا يتم الجمع عليه.

$$\delta\pi_{ch} = \delta\left\{\sum_e \left[\frac{1}{2}\int_V \sigma^j s_{jkl} \sigma^{kl} dv - \int_{s_e^i} p_e^i \bar{u}_i ds - \int_{s_e^e} p_{b,e}^i \bar{u}_i ds \right. \right. \quad (5.28)$$

$$\left. - \int_{s_e^i} (p_e^i - \bar{p}_e^i) u_i^e ds \right] - \int_{s_0^i} (\Delta p_b^i - \bar{p}_b^i) u_i^b ds \Big\} = 0$$

$\sum$  : تعني الجمع على كامل عناصر الجسم أو الوسط للدروس.

$S_b^b$  : وتعني مجموع السطوح الفاصلة بين العناصر المنتهية المجاورة لبعضها البعض والتي تكون فيها الإجهادات معلومة.

معادلات السطوح الطرفية فيها وذلك للعنصرين المتجاورين  $e, e+1$ . هي القوى في السطوح  $S_b^b$  الناتجة عن تواجد الإجهادات المفترضة بتعويض

$\bar{p}_b^i$  : هي القوى الخارجية المعلومة التي تؤثر في السطوح  $S_b^b$ . على السطح الفاصل بين عنصرين متجاورين  $e+1, e$  والذي تكون فيه القوى معلومة سوف توزع القوى الخارجية بشكل اعتباطي بحيث يكون  $\bar{p}_b^i = p_{b,e}^i + \bar{p}_{b,e+1}^i$  عندها يأخذ الحد الأخير من المعادلة (5.58) الشكل:..

$$\begin{aligned} \int_{s_0^i} (\Delta p_b^i - \bar{p}_b^i) u_i^b ds &= \int_{s_{b,e}^i} (p_{b,e}^i - \bar{p}_{b,e}^i) u_i^b ds + \int_{s_{b,e+1}^i} (p_{b,e+1}^i - \bar{p}_{b,e+1}^i) u_i^b ds \\ &= \sum_e \int_{s_{b,e}^i} (p_{b,e}^i - \bar{p}_{b,e}^i) u_i^{b,e} ds \end{aligned} \quad (5.59)$$

وهذا نستطيع إدخال الحد الأخير ضمن إشارة الجمع وتصبح الطاقة المتتمة المعدلة:

$$\begin{aligned} \delta\pi_{ch} &= \delta\left\{\sum_e \left[\frac{1}{2}\int_V \sigma^j s_{jkl} \sigma^{kl} dv - \int_{s_e^i} p_e^i \bar{u}_i ds - \int_{s_{b,e}^i} p_{b,e}^i \bar{u}_i ds \right. \right. \\ &\left. \left. - \int_{s_e^i} (p_e^i - \bar{p}_e^i) u_i^e ds \right] - \int_{s_0^i} (p_{b,e}^i - \bar{p}_{b,e}^i) u_i^{b,e} ds \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

يتبسط هذا المبدأ عند استخدامه على المسائل الوحيدة البعد حيث تكون السطوح الحرة للقطبان أو ما أسميناه السطوح "الحقيقية" خالية من الإجهادات وفق نظرية السطوح الحرة. إذ أن

الحمولات تعتبر وكأنها مطبقة على محاور العناصر ووفق هذه الافتراضات نتعلم التكاملات على السطوح الحرة للعناصر وتبقى التكاملات على أطراف العناصر وبالتالي يكون:

$$\delta \pi_{ch} = \delta \left\{ \sum_e \left[ \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^e S_{ij}^e \sigma_{kl}^e dV - \int_{\Sigma_{b,e}^i} p_{b,e}^i \bar{u}_i^{b,e} ds - \int_{\Sigma_{o,e}^i} (p_{b,e}^i - \bar{p}_{b,e}^i) u_i^{b,e} ds \right] \right\} = 0 \quad (5.61)$$

أثناء تطبيق هذا المبدأ يمكن أن نستغني في البداية عن معالجة الانتقالات المعلومة على جزء السطح  $S_{b,e}^i$  قبل الجمع على كامل المنشأ وتشكيل جملة المعادلات الخطية له وتوجه معالجتها إلى مابعد ذلك، في هذه الحالة يكون:

$$\int_{\Sigma_{b,e}^i} p_{b,e}^i \bar{u}_i^{b,e} ds - \int_{\Sigma_{b,e}^i} p_{b,e}^i u_i^{b,e} ds = \int_{\Sigma_{b,e}^i} p_{b,e}^i u_i^{b,e} ds \quad (5.62)$$

ويجرى هذا التكامل على كامل السطح الطرقي للعنصر عندها تأخذ العلاقة (5.61) الشكل التالي:

$$\delta \pi_{ch} = \delta \left\{ \sum_e \left[ \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^e S_{ij}^e \sigma_{kl}^e dV - \int_{\Sigma_{b,e}^i} p_{b,e}^i u_i^{b,e} ds + \int_{\Sigma_{o,e}^i} \bar{p}_{b,e}^i u_i^{b,e} ds \right] \right\} = 0 \quad (5.63)$$

## 5-5-2- محاورزيمات الطريقة المجهينة:

إن الحد الأول من العلاقة (5.63) يمثل الطاقة الداخلية المتممة ويحوي على توابع الإجهادات التي يمكن اختيارها بدلالة ثوابت يمكن تعيينها من شرط انعدام المتغير الأول للطاقة المتممة للعدلة الكلية. توابع الإجهادات لحالة قضيب إطارى فراغي ممثلة بموترية الإجهادات المختصرة المعطاة في العلاقة (5.28) كما رأينا، ومعاملات الليونة  $S_{ijkl}$  تختصر بناءً على الحالة الإجهادية وحالة التشوهات الخاصة بهذه الحالة إلى:

$$S_{ijkl} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

للبدء في معالجة هذه الطريقة يجب افتراض توابع الإجهادات ضمن العنصر المنتهي. لكن من الواضح لمسألتنا هذه أن الإجهادات ليست ثابتة على ارتفاع المقطع وتغير بتغير الارتفاع، لذلك يستعاض عن افتراض توابع الإجهادات بافتراض توابع قوى للمقطع الواردة في العلاقة (5.23) ولهذا لا بد من كتابة تعبير طاقة التشوه الداخلية للتممة بدلالة قوى المقطع. نستخدم لهذا الغرض العلاقات (5.21)، (5.22)، (5.23). في البدء نعر عن توابع الإجهادات بدلالة شعاع توابع الانتقالات  $\chi$  وذلك بتعويض العلاقة (5.21) في العلاقة (5.22):

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \bar{x}_{ij}^T \chi_r \quad (5.65)$$

يعبر عن الشعاع  $\chi_r$  بدلالة قوى للمقطع  $M^s$  بإيجاد معكوس العلاقة (5.23)

$$\chi_r = (E^n)^{-1} M^s \quad (5.66)$$

ومن ثم نعوض العلاقة (5.66) في العلاقة (5.65):

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \bar{x}_{ij}^T (E^n)^{-1} M^s \quad (5.67)$$

وتصبح طاقة التشوه الداخلية المتممة مكافئة لـ:

$$\begin{aligned} \pi_i^* &= \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} S_{ijk} \sigma^{kl} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 M^s (E^n)^{-1} \left( \int_0^1 \bar{x}_{ij}^T C^{ijkl} S_{ijk} C^{klmn} \bar{x}_{mn}^T dA (E^{n1})^{-1} M^s dx^1 \right) \quad (5.68) \end{aligned}$$

وملاحظة أن جداء  $C^{ijkl}$ ،  $S^{ijkl}$  مساوٍ للمصفوفة الواحدية وأن التكامل السطحي المتبقي هو نفسه التكامل (5.38) يختصر التعبير السابق إلى:

$$\pi_i^* = \frac{1}{2} \int_0^1 M^i S_{ij} M^j dx^1 ; S_{ij} = (E^n)^{-1} \quad (5.69)$$

إن افتراض توابع الإجهادات أو توابع قوى للمقطع وتوابع الانتقالات على الأطراف يخضع لاشتراطات يجب تحقيقها ونكتفي هنا بذكر هذه الاشتراطات دون برهان:

• يجب أن تحتوي التوابع المفترضة للإجهادات على حدود تمكنا من التمثيل البياني لحالة إجهادات ثابتة.

• يجب أن تسمح توابع الانتقالات المفترضة بحركة المنشأ كجسم صلب.

• عند حصول حركة للمنشأ كجسم صلب يجب أن لا يحصل فيه بنتيجة التوابع المفترضة أي قوى داخلية. فهذا الشرط يمكن التحقق منه بإعطاء عنصر منتهي للمنشأ انتقالات موافقة لحركة انسحابية أو دورانية لجسم صلب. ليكن شعاع انتقالات عقد العنصر المعبر عن مثل هذه الحركة  $u(q)$  عندها يجب أن يتحقق:

$$k^1(p) u(q) = 0 \quad (5.70)$$

بالإضافة إلى ذلك يجب أن تتحقق في مستوى كل عنصر المتراجحة التالية:

$$n_p \geq n_u - r \quad (5.71)$$

حيث:  $n_p$ : عدد الثوابت الاختيارية لتوابع الإجهادات أو قوى المقطع المفترضة.

$n_u$ : عدد درجات الحرية لكامل عقد العنصر.

$r$ : عدد الحركات الصلبة الممكنة للجسم.

وعلى مستوى كامل المنشأ يجب أن يكون:

$$n_p^g \geq n_u^g \quad (5.72)$$

$n_p^g$ : عدد الثوابت الاختيارية لتوابع الإجهادات أو قوى المقطع لكامل عناصر المنشأ.

$n_u^g$ : عدد درجات الحرية لكامل عقد المنشأ بعد معالجة الشروط الطرفية.

والأهم من ذلك كله هناك شرط يفترضه استخدام مبدأ الطاقة التامة المعدلة وهو أن تحقق توابع قوى المقطع معادلات التوازن الداخلية ضمن العنصر أي المعادلات (5.16).

كتوابع تقريبية لقوى المقطع نستخدم تلك التي اختارها المؤلف في مقال نشر له في مجلة مسهندس البناء الألمانية وهي لحالة الحمولات المبينة في الشكل (5-6):



$$\begin{bmatrix} N^1 \\ M^2 \\ M^3 \\ M^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2EI_2 & -6x^1EI_2 & 0 \\ 0 & 2EI_3 & 6x^1EI_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(x^1)^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(x^1)^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{m} \end{bmatrix}$$

$$M^i = p_k^i \beta_k + \bar{p}_k^i \bar{\beta}^k \quad (5.73)$$

يلاحظ أن التوابع التقريبية لقوى المقطع مؤلفة من جزء متجانس يحتوي على الثوابت الاختيارية  $\beta_k$  وجزء آخر غير متجانس متعلق بتوابع الحملات الخارجية المطبقة على العنصر المنتهي  $\bar{\beta}^k$ . واعتبار حالات التحميل المختلفة للعناصر المنتهية قد يكون شاقاً في معالجة المسائل العامة والمعلقة أكثر كما في حالة المسائل الثنائية البعد، إذ يجب دوماً اختيار توابع تقريبية متعلقة بالحملات وتحقق بالإضافة إلى ذلك معادلات التوازن على الطرف المنتهي. لحالة العناصر غير المحملة ينعدم الحد الثاني من الطرف الأيمن للمعادلة (5.73) ويقتصر التابع التقريبي لهذه الحالة على الجزء المتجانس.

وسوف يعالج موضوع الحصول على التوابع التقريبية لحالات تحميل مختلفة أو لحالة وجود توابع حملات لأعلى التعيين في فصل قادم يقترح فيه المؤلف مقارنة جديدة لطريقة العناصر المنتهية-نموذج الانتقالات يتم فيها ربط مباشر بين توابع الانتقالات وتوابع الحملات. بالتابع التقريبي لقوى المقطع (5.73) تصبح طاقة التشوه الداخلية للتمعة:

$$\pi_i^* = \frac{1}{2} \int_0^1 (p^k \beta_k + p_k^{-1} \bar{\beta}^k) S_{ij} (p^j \beta_j + p_j^{-1} \bar{\beta}^j) dx^1$$

$$= \frac{1}{2} \beta_k H^{kl} \beta_l + \beta_k \bar{H}_l^k \bar{\beta}^l + \bar{\beta}^k \bar{H}_{kl} \bar{\beta}^l \quad (5.74)$$

حيث:

$$H^{kl} = \frac{1}{2} \int_0^1 p^k S_{ij} p^j dx^1 \quad (5.75)$$

$$\bar{H}_l^k = \int_0^1 p_l^{-1} S_{ij} p^k dx^1 \quad (5.76)$$

$$\bar{H}_{kl} = \frac{1}{2} \int_0^1 p_k^{-1} S_{ij} p_l^{-1} dx^1 \quad (5.77)$$

المعادلة (5.76) مشكّلة بالأصل من مجموع مضروبين، ويستطيع المرء اختصارها إلى مضروب واحد بسبب خاصية التناظر لمجموع المضروبين.

بعد تقييم الحد الأول من الطاقة المتضمنة المعدلة (5.63) نتقل إلى تقييم الحد الثاني والذي يمثل في الحالة العامة عمل القوى السطحية الطرفية الناتجة من التوابع التقريبية لقوى المقطع ضمن العنصر على السطوح الطرفية للعناصر المنتهية. والسطوح الطرفية لحالتنا هذه ليست إلا سطوح المقاطع الفاصلة بين العناصر المنتهية المتجاورة وفي العنصر المنتهي (i),(k) تنتج القوى الطرفية  $P_{b,e}^i$  من تعويض معادلات المقطعين الطرفيين للعنصر (i) (k) وهي  $x^1 = 0$  للطرف (i) و  $x^1 = 1$  للطرف (k) في التوابع التقريبية لقوى المقطع ضمن العنصر (5.73)، وبالتالي يكون:

$$\begin{bmatrix} -N_{(0)}^i \\ -Q_{(0)}^2 \\ -Q_{(0)}^3 \\ -M_{(0)}^i \\ -M_{(0)}^e \\ -M_{(0)}^e \\ N_{(0)}^i \\ Q_{(0)}^2 \\ Q_{(0)}^3 \\ M_{(0)}^i \\ M_{(0)}^e \\ M_{(0)}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_b \\ 0 & 0 & 0 & 2EI_2 & 0 & 0 \\ 0 & -2EI_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_b \\ 0 & 0 & 0 & -2EI_2 & -6EI_1 & 0 \\ 0 & 2EI_3 & 6EI_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{l^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{-1} \\ p_{-2} \\ p_{-3} \\ p_{-1} \\ m \end{bmatrix} \quad (5-78)$$

$p_{b,e}^i = R^k \beta_k + \bar{R}_k^i \bar{\beta}^k$  (5-78)  
 في الحد الثاني من العلاقة (5-63) هي توابع الانتقالات التي يمكن افتراضها بشكل اختياري وذلك وفق مبدأ الطاقة المتضمنة للمعدل. هذا الشعاع يختار عادة بدلالة انتقالات العقد و يجب أن يحوي كافة الانتقالات بما فيها الدورانات الموافقة لشعاع قوى المقطع الطرفية  $p_{b,e}^i$  الذي أخذت مركباته في العقدة (I) سالبة في العلاقة (5-78) وذلك لأن هذه القوى معاكسة للانتقالات الموجبة المفترضة. في الحالة العامة تأخذ توابع الانتقالات المفترضة هذه الشكل :

$$u_i^{b,e} = L_i^j . u_j \quad (5-79)$$

حيث  $L_i^j$  هي توابع الشكل.  $u$  شعاع انتقالات عقد المنصر وهو مكافئ للشعاع  $u_{(p)}^0$  في العلاقة (5-31) و يحوي لحالتنا هذه على اثني عشر درجة حرية و هي الانتقالات والدورانات باتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة للعقدتين (i),(k) على التوالي. و بما أن الشعاع  $u_i^{b,e}$  يجب أن يحوي على نفس درجات الحرية ليتوافق مع الشعاع  $p_{b,e}^i$  ففي حالتنا هذه تكون توابع الشكل  $L_i^j$  هي المصفوفة الواحدة .

يمكن الآن تقييم الحد الآنف الذكر باستخدام العلاقتين (5-78),(5-79) مع الشكل:

$$T_i = \int_S p_{b,e}^i \cdot u_i^{b,e} \cdot dS = (R^k \beta_k + \bar{R}_k^i \cdot \bar{\beta}^k) L_i^j \cdot u_j$$

$$= \beta_k \cdot T^k u_j + \bar{\beta}^k \cdot \bar{T}_k^i u_j \quad (5-80)$$

حيث :

$$T^k = R^k \cdot L_i^j \quad (5-81)$$

$$\bar{T}_k^i = \bar{R}_k^i \cdot L_i^j \quad (5-82)$$

$T_k^j, \bar{T}_k^j$  مطابقتان على التوالي لـ  $R^k, \bar{R}_k^i$ . وذلك لأن  $L_i^j$  مطابقة للمصفوفة الواحدية في حالة القضيب الإطاري الفراغي .

بقي الآن تقييم الحد الأخير من العلاقة (5-63) حيث تمثل  $\bar{p}_{b,e}^i$  قوى خارجية معطاة تؤثر على السطوح  $S_{e,b}^{b,e}$ . و لتعالج في البدء الحالة العامة، التي تكون فيها مثل هذه السطوح محملة بمسوى خارجية معلومة شديداً في نقاط مميزة من العنصر المنتهي  $\bar{p}_{e,b}^k$  ( شدة القوة الخارجية الموزعة مثلاً في عقد العنصر المنتهي و في نقاط أخرى كمنتصف العنصر ). عندها نستطيع أن نعر عن تسابع الحملات على العنصر بالشكل:

$$\bar{p}_{b,e}^i = A_k^i \cdot \bar{p}_{e,b}^k \quad (5-83)$$

حيث  $A_k^i$  توابع الشكل للحمولة الموزعة. يتعلق عدد حدود تابع الشكل بعدد النقاط المتخذة لوصف تابع الحملولة. و الحد الأخير من العلاقة (5-63) يصبح:

$$T_4 = \int_{S_{e,b}^{b,e}} \bar{p}_{b,e}^i \cdot u_i^{b,e} \cdot dS = \bar{p}_{e,b}^k \int_{S_{e,b}^{b,e}} A_k^i \cdot L_i^j \cdot dS \cdot u_j = \bar{S}^j \cdot u_j \quad (5-84)$$

حيث :

$$\bar{S}^j = \bar{p}_{e,b}^k \int_{S_{e,b}^{b,e}} A_k^i \cdot L_i^j \cdot dS \quad (5-85)$$

و الشعاع الأخير لحالة القضيب الإطاري يحتوي على القوى الخارجية المركزة على العقد (كما فيها العزوم الخارجية) و ذلك لأن السطوح  $S_{e,b}^{b,e}$  ليست إلا سطوح المقاطع الفاصلة بين العناصر المنتهية المتجاورة و التي تؤثر فيها قوى خارجية معلومة.

و بتعويض حدود العلاقة (5-63) بمكافئاتها من العلاقات (5-74) (5-80) (5-84) نحصل على الطاقة المتزمة المعدلة :

$$\pi_{ch} = \sum_i \left( \frac{1}{2} \beta_i \cdot H^i \cdot \beta_i + \beta_k \cdot \bar{H}_i^k \cdot \bar{\beta}_i^1 + \bar{\beta}^k \cdot \bar{H}_k \cdot \bar{\beta}^1 - \beta_k \cdot T^{kl} \cdot u_l - \bar{\beta}_k \cdot \bar{T}_k^j \cdot u_j + \bar{s}^j \cdot u_j \right) \quad (5-86)$$

و المتغير الأول للطاقة للمتزمة المعدلة وفق مبادئ حساب المتغيرات:

$$\delta \pi_{ch} = \frac{\partial \pi_{ch}}{\partial \beta} \cdot \delta \beta + \frac{\partial \pi_{ch}}{\partial u} \cdot \delta u = 0 \quad (5-87)$$

و باعتبار  $\delta u$  ,  $\delta \beta$  متغيرات اختيارية فإن المعادلة (5-87) محققة فقط عندما يكون الحد الأول مكافئ للصفر و في نفس الوقت الحد الثاني منها مكافئ للصفر. إذا بأخذ المتغير الأول للعلاقة (5-86) بالنسبة للثوابت الاختيارية يكون :

$$(\beta_i H^i + \bar{H}_i^k \cdot \bar{\beta}_i^1 - T^{kl} \cdot u_l) \cdot \delta \beta_k = 0 \quad (5-88)$$

من هذه المعادلة تتحدد الثوابت الاختيارية بدلالة شعاع الانتقالات لعقد العنصر. بمساواة الحدود بين القوسين الصغيرين بالصفر و نقل الحد الثاني و الثالث منها إلى الطرف الأيمن من المعادلة الناتجة و ضرب المعادلة الناتجة بـ  $H_{kr}$  معكوس  $H^{kl}$

$$\beta_r = H_{kr} \cdot (-\bar{H}_k^i \cdot \bar{\beta}_i^1 + T^{kl} \cdot u_l) \quad (5-89)$$

و المصفوفة  $H_{kr}$  تسمى مصفوفة المادة للعنصر، وهي مكافئة للمصفوفة التالية :

$$H_{kr} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EAl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI_3 l} & -\frac{1}{2EI_3 l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2EI_3 l^2} & \frac{1}{3EI_3 l^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_2 l} & -\frac{1}{2EI_2 l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2EI_2 l^2} & \frac{1}{3EI_2 l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GI_D l} \end{bmatrix} \quad (5-90)$$

حيث يحقق كلا من  $H^k, H_{kr}$  العلاقة التالية :

$$H^k H_{kr} = \delta_r^k \quad r=1,2,6 \quad (5-91)$$

بتعويض الثوابت الاختيارية (5-89) في العلاقة (5-86) نحصل بعد استبدال القرينة 1 بقرينة r والكافة k بآخرى موافقة t على :

$$\begin{aligned} \pi_{ch} = & \sum_e \frac{1}{2} (-\bar{H}_t^k \cdot \bar{\beta}^r + T^k \cdot u_j) H_{kt} (-\bar{H}_s^k \cdot \bar{\beta}^s + T^k \cdot u_i) + \\ & + H_{kt} (-\bar{H}_s^k \cdot \bar{\beta}^s + T^k \cdot u_i) \bar{H}_t^k \cdot \bar{\beta}^r + \bar{\beta}^r \cdot \bar{H}_t^k \cdot \bar{\beta}^s \\ & H_{kt} (-\bar{H}_s^k \cdot \bar{\beta}^s + T^k \cdot u_i) T^k \cdot u_j - \bar{\beta}^r \cdot \bar{T}_t^j \cdot u_j + \bar{s}^j \cdot u_j \end{aligned} \quad (5-92)$$

و باختصار الخلود المتشابهة و إدخال بعض الاختصارات ينتج :

$$\pi_{ch} = \sum_e \left( -\frac{1}{2} \cdot u_i \cdot k^i \cdot u_j + \bar{f}^j \cdot u_j + c \right) \quad (5-93)$$

حيث :

$$K^k = T^k \cdot H_{kt} \cdot T^k \quad (5-94)$$

مصفوفة التساوة للعنصر المنتهي ، و :

$$\bar{f}^j = H_{kt} \cdot \bar{H}_t^k \cdot \bar{\beta}^s \cdot T^k - \bar{\beta}^r \cdot \bar{T}_t^j + \bar{s}^j \quad (5-95)$$

القوة المركزة على العقد و المكافئة للحمولات الخارجية الموزعة ضمن العنصر و القوى المؤثرة على أطراف العنصر ، بينما :

$$c = -\frac{1}{2} \bar{H}_s' \bar{\beta}' \cdot H_s \bar{\beta}' \cdot \bar{H}_t' \bar{\beta}' + \bar{\beta}' \cdot \bar{H}_t \bar{\beta}' \quad (5-96)$$

مثل ثانياً جديراً.

بعد كتابة تعبير الطاقة المتممة المعدلة (5-93) بدلالة شعاع انتقالات العقد النسبوية إلى المحاور الإحداثية العامة وإجراء الجمع على كامل المنشأ بشكل مماثل لما رأينا في نموذج الانتقالات نحصل على الطاقة المتممة المعدلة لكامل المنشأ .

$$\pi_{ch} = -\frac{1}{2} \cdot u_s \cdot k^m \cdot u_s + \bar{f}^n \cdot u_n + c_1 \quad (5-97)$$

و يأخذ المتغير الأول للعلاقة السابقة ومساواته بالصفر وفق مبدأ الطاقة المتممة المعدلة نحصل على جملة المعادلات الجبرية الخطية:

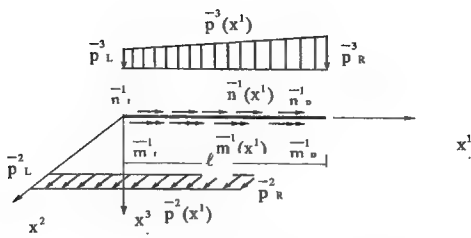
$$k^{m\prime} \cdot u_s - \bar{f}^n = 0 \quad (5-98)$$

جدير بالذكر هنا أن مصفوفة القساوة لعنصر منتهي اطاري فراغي هجين و المطورة في العلاقة (5-94) مكافئة تماماً لتلك المعطاة بالعلاقة (5-40) و أن القوى المركزة على العقد المكافئة للحمولات الخارجية الموزعة ضمن العنصر و المطورة في العلاقة (5-95) مكافئة لمثلثتها في العنصر نموذج الانتقالات (5-43) و ذلك بعد استبعاد الحد  $\bar{f}^n$  الذي يمثل القوى المركزة المكافئة للحمولات الخارجية المطبقة على الطرف الذي تكون فيه القوى معلومة.

و قبل الانتقال إلى الفقرة التالية نود معالجة حالة التحميل الأكثر شيوعاً و هي حالة التحميل بمحمولة على شكل شبه منحرف (شكل 5-9) شلحها من اليسار مميزة بالرمز  $L$  و شلحها من اليمين تميز بإضافة الرمز  $R$  إلى المحملة.

و يفهم من توزيع المحملة أيضاً أن المحملة الناعمية تتغير بشكل شبه منحرف على طول القضيب. و كذلك محملة عزم القتل أيضاً. في هذه الحالة أيضاً نفترض التوابع التقريبية لقوى المقطع كجزء متجانس غير متعلق بالمحمولات الخارجية و جزء آخر غير متجانس متعلق بالمحمولات الخارجية  $(M' = p^{\#} \cdot \beta_s + \bar{p}_s' \cdot \bar{\beta}^{\#})$  .

يبقى الجزء المتجانس واحداً لكل حالات التحميل ، بينما يختلف الجزء غير المتجانس من حالة تحميل إلى أخرى. و لحالة التحميل هذه نستخدم التابع التقريبي التالي:



شكل 5-9: حالة تحميل بمحمولات على شكل شبه منحرف

$$\bar{p}_k^i \bar{p}^k = \begin{bmatrix} -x^1 & -\frac{(x^1)^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(x^1)^2}{2} & -\frac{(x^1)^3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(x^1)^2}{2} & \frac{(x^1)^3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^1 & -\frac{(x^1)^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n}_L^1 \\ \bar{n}_R^1 - \bar{n}_L^1 \\ \bar{p}_L^2 \\ \bar{p}_R^2 - \bar{p}_L^2 \\ \bar{p}_L^3 \\ \bar{p}_R^3 - \bar{p}_L^3 \\ \bar{m}_L^1 \\ \bar{m}_R^1 - \bar{m}_L^1 \end{bmatrix} \quad (5-99)$$

و يلاحظ أن الجزء غير المتجانس للتابع التقريبي يصبح مكافئاً لمثلث في العلاقة (5-73) أي لحالة القوى الموزعة بانتظام عندما يكون  $\bar{p}_L = \bar{p}_R = \bar{p}$ . كما يمكن أن نستنتج منه التابع التقريبي لحالة حمولة مثلثية في الحالة التي يكون فيها  $\bar{p}_R = 0$ . بالإضافة إلى ذلك يمكن استخدام حالة التحميل هذه كحمولة أساسية لتقريب أشكال الحمولات المنحنية المعقدة و ذلك بتحويلها إلى خط منكسر تتطابق نقاط انكساره مع قيم الحمولة المعقدة في تلك النقاط. وفي مثل هذه الحالة سوف نضطر إلى تقسيم المنشأ تقسيماً دقيقاً بحيث نستطيع تمثيل الحمولة المعقدة بأقرب شكل ممكن.



## 5-6- اقتراحات لمعالجة طرق العناصر المنتهية:

يلاحظ أثناء تنفيذ طريقة العناصر المنتهية-نموذج الانتقالات أنه في افتراض التوابع التقريبية للانتقالات قد حدد عدد التوابع الاختيارية بحيث يكون مساوياً لعدد درجات الحرية لعقد العنصر المنتهي. وهذا يسمح فقط بإيجاد علاقة تربط بين توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر و درجات الحرية لعقد العنصر. مما يعني أنه لا توجد هناك علاقة مباشرة على مستوى العنصر بين توابع الانتقالات فيه و بين الحمولات الخارجية المطبقة عليه. و تظهر علاقة الحمولات بالانتقالات فقط على مستوى المنشأ ككل في جملة المعادلات الجبرية الخطية لكامل الجملة المدروسة وذلك بشكل تقطي على عقد الجملة . وفي مثل هذه العلاقة على مستوى المنشأ لا يظهر أي تأثير لشكل توابع الحمولات ضمن العنصر نفسه على شكل توابع الانتقالات . و بالتالي لا يظهر هذا التأثير أيضاً على شكل توابع الإجهادات المشتقة من توابع الانتقالات. و تتعلق توابع الانتقالات لهذه المقاربة التقليدية و عليه توابع الاجهادات المشتقة منها بالتحولات المستقلة الديكارتية و بانتقالات عقد العنصر فقط. وهذا يعني أن منحنيات الانتقالات و الاجهادات الناتجة باستخدام هذه الطريقة هي نفسها لعنصرين أحدهما يحمل بحمولة موزعة و الآخر غير يحمل و تحصل في عقديهما نفس الانتقالات . في الواقع هناك علاقة مباشرة بين توابع الحمولات للعنصر و توابع الانتقالات و الاجهادات فيه على المستوى التفاضلي للعنصر تجسدها المعادلات التفاضلية للمسألة المطروحة . لكن الأساس النظري لطريقة الانتقالات و هو مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري يسمح باستقلالية توابع الانتقالات ضمن العنصر عن توابع الحمولات، إذ لا يفترض في توابع الاجهادات المشتقة من توابع الانتقالات التقريبية أن تحقق معادلات التوازن ضمن العنصر ، ويتم تحقيق معادلات التوازن بشكل تكاملي على كامل عقد الجملة المدروسة، و هذا ما تجسده جملة المعادلات الجبرية الخطية التابعة للمنشأ بكامله. هناك أعداد لا تحصى من الأعمال العلمية عاجلت مختلف أنواع المنشآت بتطبيق طريقة العناصر المنتهية-نموذج الانتقالات، استخدم فيها قاطبة توابع انتقالات تقريبية لا تراعي الربط المباشر بين الانتقالات و الحمولات ضمن العنصر المنتهي . وفي بعض هذه التطبيقات افترضت توابع تقريبية للانتقالات لا تحقق فقط المتطلبات التي ينص عليها مبدأ الطاقة الكامنة

الأصغري وإنما حققت جزء المعادلة التفاضلية للتجانس للمسألة المطروحة (انظر توابع الانتقالات التقريبية (5.33)، (4.19) ) . و على هذا الأساس طورت عناصر منتهية أعطت على سبيل المثال نتائج جيدة تجاري الحل التحليلي لحالة منشآت غير محملة بمحمولات خارجية موزعة على عناصرها ، بل بمحمولات خارجية مركزة على العقد . و ظهرت أخطاء الحل واضحة و جلية في حالة استخدامهما لحل منشآت محملة بمحمولات موزعة ووصلت هذه الأخطاء إلى حدود 50% في حسابات القوى القصية .

أما في التطبيق المصين لطريقة العناصر المنتهية-نموذج الاجهادات فهناك ربط مباشر بين توابع الاجهادات التقريبية و توابع المحمولات ضمن العنصر يحكمه مبدأ الطاقة المتمة المعدل الذي يمثل الأساس النظري لهذه الطريقة . فوفق هذا المبدأ يجب أن تحقق توابع الاجهادات التقريبية معادلات التوازن الداخلية ضمن العنصر المنتهي . لذلك لابد من الربط المباشر بين توابع الاجهادات التقريبية و توابع المحمولات ضمن العنصر المنتهي . أما الربط بين الانتقالات و توابع المحمولات فيتم أيضاً بهذه الطريقة بشكل غير مباشر و نقطي بعد حذف للعلامات  $\beta$  - في جملة المعادلات الجبرية الخطية النهائية لانتقالات العقد . جدير بالذكر أيضاً أنه أثناء تطبيق هذه الطريقة لم يراعى الربط المنظم بين توابع الاجهادات التقريبية و توابع المحمولات وإنما اعتبرت توابع الاجهادات التقريبية متعلقة بالمحمولات الموزعة ضمن العنصر بحيث تتحقق معادلات التوازن الداخلية ضمن العنصر .

إضافة إلى ذلك طورت زمرة عناصر منتهية من نموذج ترفتر (Trefftz) تراعى الربط المباشر بين توابع الانتقالات التقريبية و توابع المحمولات ضمن العنصر بحيث تتحقق المعادلة التفاضلية للمسألة المطروحة ضمن العنصر المنتهي . لكن هذا الربط تم أيضاً بشكل عشوائي غير منظم لا يراعي العلاقة المباشرة بين توابع المحمولات و شكل منحنى الانتقالات الناتجة ضمن العنصر .

في كل الطرق سابقة الذكر لم يتم اقتراح أي طريقة نظامية للربط المباشر المنظم بين محمولات العنصر و انتقالاته بالإضافة إلى ذلك لم يتم إدخال محمولات العنصر في الخوارزميات الأساسية لاستنباط توابع الشكل أثناء الانتقال من التوابع التقريبية بالثوابت الاختيارية إلى توابع تقريبية متعلقة بمرجحات الحرية.

في الفقرة التالية سيتم إدخال توابع حولات العنصر المنتهي في أساسيات اشتقاق التوابع التقريبية للانتقالات أو التوابع التقريبية للإجهادات بشكل منظم وغير عشوائي. بحيث تتحقق العلاقة الدقيقة بين حولات العنصر و توابع الانتقالات التقريبية فيه وذلك على المستوى التفاضلي .

#### 5-6-1- عوميات ربط التوابع التقريبية بمحولات العنصر و درجات الحرية:

في البدء نختار توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر ككثير حدود بثوابت اختيارية عددها  $n$  ثابته

$$u_i = x_i^n \cdot c_n \quad (5-100)$$

حيث  $u_i$  توابع الانتقالات التقريبية التي يمكن معرفتها وصف الحالة الانتقالية لكل نقطة من نقاط الجسم وصفا تاما ،  $x_i^n$  مصفوفة متعلقة فقط بالإحداثيات الديكارتية المحلية المستقلة ،  $c_n$  ثوابت اختيارية ليس لها في البدء أي مضمون إنشائي ونعتبر عددها للوهلة الأولى لانهائي .

نفرض أن المعادلة التفاضلية التي تحكم المسألة المدروسة من الشكل:

$$\Delta^q u_i = \bar{p}^j \quad (5-101)$$

حيث  $\bar{p}^j$  مصفوفة من المعاملات التفاضلية ،  $\bar{p}^j$  توابع الحمولات الخارجية الموزعة .

إن تطبيق المعادلة التفاضلية (5-101) على التوابع التقريبية يعطي علاقة تربط الثوابت الاختيارية بالحمولات الخارجية .

$$(\Delta^q x_i^n) \cdot c_n = \bar{p}^j \quad (5-102)$$

جملة المعادلات هذه تقبل بشكل عام عدد لانهائي من الحلول وتعلق حلولها بشكل إعطاء توابع الحمولات الخارجية . فقد تكون توابع الحمولات الخارجية معطاة بشكل تحليلي ، عندها يمكن تحويل هذه التوابع مثلا إلى كثرات حدود بنشرها حول نقطة ما من العنصر المنتهي (وليكن مركز ثقل العنصر) وفق سلسلة تايلور مثلا، و القيام بمثل هذا النشر يحدده الإنشائي وفق أهمية المنشأ المدروس ، فبعد هذا النشر يمكن بالمقارنة بين الحدود المتشابهة من اتقاء حل مناسب و تعيين بعض الثوابت الاختيارية بدلالة الحمولات الخارجية . أو يمكن في الحالة العامة أن تعطى توابع الحمولات الخارجية كحمولات لا على التعيين موصوفة بشكل تقطي على عقد العنصر وفي نقاط مميزة منه،

إذ تعطى شدتها في النقاط المذكورة . في هذه الحالة يمكن استخدام التوابع التقريبية للحصول على توزيع تقريبي لتوابع الحمولات الخارجية ضمن العنصر المنتهي بدلالة شدة الحمولات الخارجية على عقد العنصر وذلك بتطبيق مماثل لما ورد في حالة الانتقالات عند تعيينها بدلالة انتقالات عقد العنصر (انظر للمعادلات من (5-30) إلى (5-33) وهذا التوزع الشكل العام التالي :

$$\bar{p}^j = NP_r^j \cdot \bar{p}_0^j \quad (5-103)$$

حيث  $NP_r^j$  توابع الشكل ، و تتعلق بالمتحولات الإحداثية المستقلة .

في هذه الحالة يمكن مطابقة حدود طرفي المعادلة (5-102) من انتقاء حل مناسب يحدد التوابت الاختيارية المتعلقة بالحمولات الخارجية . و انتقاء الحل المناسب يوضع لضوابط أيضاً كما في اشتقاق التوابع التقريبية بالطريقة التقليدية . و ينصح هنا بانتقاء أبسط حل ممكن و بعد تحديد التوابت الاختيارية المتعلقة بالحمولات الخارجية يجب أن يكون عدد التوابت الاختيارية التي لم يتم تعيينها أو إعطائها مضموناً إنشائياً مساوياً لعدد درجات الحرية للعنصر مضروباً بعدد عقد العنصر ، حتى تتمكن من تعيين التوابت المتبقية بدلالة انتقالات العقد ، أي العدد المعروف في الطريقة التقليدية. و بعد هذا التحديد يجب أن يحقق التابع الناتج متطلبات شروط الاستمرارية الواردة في الطريقة التقليدية . كما يجب أن ينقسم التابع التقريبي إلى جزء متجانس موافق لجزء المعادلات التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المطروحة . عندها يأخذ تابع الانتقالات التقريبية الشكل :

$$u_i = M_i^k \cdot c_k + \bar{M}_{ij} \cdot \bar{p}^j \quad (5-104)$$

حيث عدد من التوابت الاختيارية مكافئة لعدد عقد العنصر المنتهي مضروباً بعدد درجات الحرية على العقدة،  $M_i^k$  ;  $\bar{M}_{ij}$  مصفوفتان ثلثان الجزء المتجانس و غير المتجانس للتوابع التقريبية على التوالي و متعلقتان بالإحداثيات المحلية المستقلة المستخدمة . يمكن الآن تجميع انتقالات عقد العنصر في شعاع  $u_{k(e)}$  عدد عناصره مساو لعدد عقد العنصر مضروباً بعدد درجات الحرية و الحصول على هذا الشعاع من العلاقة (5-104) بعد تعويض إحداثيات عقد العنصر في العلاقة نفسها

$$u_{k(e)} = A_{k(e)}^1 \cdot c_1 + \bar{A}_{k(e)j} \cdot \bar{p}^j \quad (5-105)$$

المصفوفتان  $A_{k(e)}^1$  ;  $\bar{A}_{k(e)j}$  مصفوفتان تنتجان من  $M_i^k$  ;  $\bar{M}_{ij}$  بتعويض الإحداثيات الخاصة لعقد العنصر في المصفوفتين الأخيرتين، و  $I$  قرينة تتحول كما القرينة  $k$  .  $u_{k(e)}$  شعاع انتقالات العقد وهو مطابق للشعاع  $u_{l(e)}$  في العلاقة (5-33) إلا أن  $(e)$  استخدمت الآن ليس كقرينة و

إنما تمييز انتقالات العقد . بعد نقل الحد الثاني من الطرف الأيمن للمعادلة (5-105) إلى الطرف الأيسر نحصل على جملة المعادلات الخطية لتحديد الثوابت الاختيارية المتبقية .

$$A_{k(e)}^1 . c_1 = u_{k(e)} - \bar{A}_{k(e)j} . \bar{p}^j \quad (5-106)$$

و حل جملة المعادلات هذه يمكن الحصول عليه مثلاً بإيجاد معكوس المصفوفة  $A_{k(e)}^1$  و لتكن  $B_m^{k(e)}$  و بعد ضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة  $B_m^{k(e)}$  نحصل على :

$$B_m^{k(e)} . A_{k(e)}^1 . c_1 = \delta_m^1 . c_1 = c_m = B_m^{k(e)} (u_{k(e)} - \bar{A}_{k(e)j} . \bar{p}^j) \quad (5-107)$$

حيث  $\delta_m^1$  للمصفوفة الواحدية ، و  $m$  قرينة تتحول كما تتحول  $1$  أو  $k$  . و باعتبار القريتين  $k, m$  تتحولان مثل بعضهما البعض فيمكن تبديلهما ببعضهما البعض دون أن يحصل أي تغيير في العلاقة (5-107) أي أن :

$$c_k = B_k^{m(e)} (u_{m(e)} - \bar{A}_{m(e)j} . \bar{p}^j) \quad (5-108)$$

نعوض الآن الثوابت الاختيارية في العلاقة (5-104) التي انطلقنا منها فنحصل على :

$$\begin{aligned} u_i &= M_i^k . B_k^{m(e)} (u_{m(e)} - \bar{A}_{m(e)j} . \bar{p}^j) + \bar{M}_{ij} . \bar{p}^j \\ &= M_i^k . B_k^{m(e)} . u_{m(e)} + (-M_i^k . B_k^{m(e)} \bar{A}_{m(e)j} + \bar{M}_{ij}) . \bar{p}^j \\ &= N_i^{m(e)} . u_{m(e)} + \bar{N}_{ij} . \bar{p}^j \end{aligned} \quad (5-109)$$

حيث :

$$N_i^{m(e)} = M_i^k . B_k^{m(e)} \quad (5-110)$$

هو جزء تابع الشكل المتحانس و :

$$\bar{N}_{ij} = -M_i^k . B_k^{m(e)} . \bar{A}_{m(e)j} + \bar{M}_{ij} = -N_i^{m(e)} . \bar{A}_{m(e)j} + \bar{M}_{ij} \quad (5-111)$$

جزء تابع الشكل غير المتحانس .

و بذلك نكون قد حصلنا على علاقة تربط بين توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر من جهة و بين انتقالات عقد العنصر بالإضافة إلى الحمولات الخارجية الموزعة المطبقة على العنصر من جهة أخرى .

يمكن الآن استخدام التوابع التقريبية للانتقالات المشتقة بهذه الطريقة في تطبيق طريقة العناصر المنتهية-نموذج الانتقالات ، ولاحظ أن هذا التطبيق يصبح مكافئاً لمثله التقليدي عند انعدام الحمولات الخارجية الموزعة ضمن العناصر للنتيجة و اقتصار الحمولات على حمولات خارجية

مركزة على عقد العناصر. إذ نعلم في هذه الحالة الجزء غير المتجانس من التابع التقريبي (5-109) و المتعلق بالحمولات الخارجية الموزعة و تبقى علاقة تربط بين تابع الانتقالات و درجات حرية عقد العنصر .

كما يمكن أيضاً أن نشق من مثل هذه التوابع التقريبية للانتقالات ، توابع تقريبية للإجهادات أو قوى المقطع لاستخدامها في طريقة العناصر المنتهية-النموذج المجهن للإجهادات، إذ أن توابع الإجهادات أو قوى المقطع المشتقة من توابع انتقالات محققة للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المطروحة على المستوى التفاضلي تحقق بدورها بشكل آلي معادلات التوازن غير المتجانسة ضمن العنصر و على المستوى التفاضلي أيضاً .

## 5-6-2- عنصر إطارى فراغى بتوابع تقريبية متعلقة بحمولات العنصر :

ليكن لدينا عنصر فراغى إطارى منسوب إلى جملة محاور إحداثية عليية و محمل بمحمولات تتغير بشكل عطي على شكل شبه منحرف كما في الشكل (5-9). حالة التحميل هذه تعتبر من الحالات العامة بالإضافة إلى ذلك يمكن اعتبارها حمولة أساسية لتقريب حالات تحميل أخرى. لنبدأ الآن بتحديد عدد الثوابت الاختيارية التي يجب اعتبارها لتقريب توابع الانتقالات ضمن العنصر، و لنبدأ أولاً بتابع الانتقالات التقريبي الممثل للانتقال المحوري باتجاه  $x^1$  و لنفرض أن هذا التابع يحتوي على عدد لانهائي من الثوابت الاختيارية و ممثل بكثير الحدود التالي :

$$u_1^0(x^1) = c_0 + c_1.x^1 + c_2.(x^1)^2 + c_3.(x^1)^3 + ..... + c_n.(x^1)^n \quad (5-112)$$

إن تطبيق المعادلة التفاضلية (الخاصة بالانتقالات المحورية، المعادلة الأولى من العلاقة (5-27) ) على العلاقة (5-112) يؤدي إلى :

$$EA \frac{d^2 u_1^0}{dx^1} = EA[2c_2 + (3)(2)c_3.x^1 + (4)(3)(2)c_4.(x^1)^2 + ... \quad (5-113)$$

$$.. + (n)(n-1)(x^1)^{n-2}] = -\bar{n}^1(x^1)$$

و الحمولة  $\bar{n}^1(x^1)$  على بعد ما  $x^1$  من الطرف اليساري مساوية للتابع:

$$\bar{n}^1(x^1) = \bar{n}_L^1 + \frac{x^1}{l}(\bar{n}_R^1 - \bar{n}_L^1) \quad (5-114)$$

أبسط حل يمكن اختياره لكي تتحقق المعادلة التفاضلية (5-113) ينتج من مقارنة كثير الحدود في العلاقة (5-113) مع كثير الحدود في العلاقة (5-114) فنحصل على :

$$c_2 = -\frac{\bar{n}_L^1}{2EA}; c_3 = -\frac{1}{6EA}(\bar{n}_R^1 - \bar{n}_L^1); c_4 = 0, \dots, c_n = 0 \quad (5-115)$$

و يصبح التابع التقريبي للانتقال باتجاه المحور  $x^1$  والذي يجب افتراضه مكافئ لـ:

$$u_1^0(x^1) = c_0 + c_1 x^1 - \frac{(x^1)^2}{2EA} \bar{n}_L^1 - \frac{(x^1)^3}{6EA} (\bar{n}_R^1 - \bar{n}_L^1) \quad (5-116)$$

وهو يتألف من جزء متجانس متعلق بثوابت اختيارية و آخر غير متجانس متعلق بالحملولة .

نفس المناقشة نجريها الآن للتابع التقريبي للانتقال  $u_3^0$  و لنفرض أن :

$$u_3^0(x^1) = \alpha_0 + \alpha_1 (x^1) + \alpha_2 (x^1)^2 + \alpha_3 (x^1)^3 + \alpha_4 (x^1)^4 + \alpha_5 (x^1)^5 + \dots + \alpha_n (x^1)^n \quad (5-117)$$

بتطبيق المعادلة التفاضلية (الخاصة بهذا الانتقال) يجب أن يكون الحد الأيمن من المعادلة التالية :

$$EI_2 \cdot \frac{d^4 u_3^0}{(dx^1)^4} = EI_2 [(4)(3)(2)(1) \alpha_4 + (5)(4)(3)(2) \alpha_5 x^1 + \dots + (n)(n-1)(n-2)(n-3) \alpha_n (x^1)^{(n-4)}] \quad (5-118)$$

مكافئ للحد الأيمن من للمعادلة اللاحقة :

$$EI_2 \frac{d^4 u_3^0}{(dx^1)^4} = \bar{p}^2(x^1) = \bar{p}_L^2 + \frac{x^1}{l}(\bar{p}_R^2 - \bar{p}_L^2) \quad (5-119)$$

و الحل الأبسط بتهيئة المقارنة هو :

$$\alpha_4 = \frac{\bar{p}_L^2}{24EI_2}; \alpha_5 = \frac{1}{120EI_2 l}(\bar{p}_R^2 - \bar{p}_L^2); \alpha_6 = 0; \alpha_7 = 0; \dots; \alpha_n = 0 \quad (5-120)$$

ويصبح التابع التقريبي الذي يجب اعتباره :

$$u_3^0(x^1) = \alpha_0 + \alpha_1 (x^1) + \alpha_2 (x^1)^2 + \alpha_3 (x^1)^3 + \frac{(x^1)^4}{24EI_2} \bar{p}_L^2 + \frac{(x^1)^5}{120EI_2 l} (\bar{p}_R^2 - \bar{p}_L^2) \quad (5-121)$$

و بنفس الأسلوب السابق نحدد التوابع التقريبية للانتقال  $u_2^0$  و للدوران  $\varphi_1$  . وجميع هذه الانتقالات في شعاع وإعادة ترقيم الثوابت الاختيارية من  $c_0$  إلى  $c_{11}$  نحصل على التوابع الاختيارية بشكلها المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{M}_{25} & \overline{M}_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{M}_{33} & \overline{M}_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{M}_{47} & \overline{M}_{48} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{p}_L^1 \\ \overline{p}_R^1 \\ \overline{p}_L^2 \\ \overline{p}_R^2 \\ \overline{p}_L^3 \\ \overline{p}_R^3 \\ \overline{p}_L^4 \\ \overline{p}_R^4 \end{bmatrix} \dots \quad (5-12)$$

$$u_i^0 = M_i^k c_k + \overline{M}_{ij} p_j$$



حيث:

$$\bar{M}_{11} = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l} \right]$$

$$\bar{M}_{12} = -\frac{1}{EA} \cdot \frac{(x^1)^3}{6l}$$

$$\bar{M}_{25} = \frac{1}{EI_3} \left[ \frac{(x^1)^4}{24} - \frac{(x^1)^5}{120l} \right]$$

$$\bar{M}_{26} = \frac{1}{EI_3} \cdot \frac{(x^1)^5}{120l}$$

$$\bar{M}_{33} = \frac{1}{EI_3} \left[ \frac{(x^1)^4}{24} - \frac{(x^1)^5}{120l} \right]$$

$$\bar{M}_{34} = \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{(x^1)^5}{120l}$$

$$\bar{M}_{47} = \frac{1}{GI_D} \left[ -\frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l} \right]$$

$$\bar{M}_{48} = \frac{1}{GI_D} \cdot \frac{(x^1)^3}{6l}$$

(5.123)

بعد اجراء العمليات المبونة باختصار في الانتقال من العلاقة (5-104) إلى العلاقة (5-109) نحصل على التوابيع التقريبية المرغوبة. و القسم المتجانس لتوابيع الشكل  $N_i^{m(o)}$  مماثل تماما للمصفوفة  $N_i^{k(p)}$  الواردة في العلاقة (5-33) ، أما الجزء غير المتجانس فهو المصفوفة :

$$\bar{N}_q = \begin{bmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{25} & \bar{N}_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{33} & \bar{N}_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{47} & \bar{N}_{48} \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

حيث :

$$\bar{N}_{11} = \frac{1}{EA} \left[ \frac{1x^1}{3} - \frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l} \right]$$

$$\bar{N}_{12} = -\frac{1}{EA} \left[ \frac{1x^1}{6} - \frac{(x^1)^3}{6l} \right]$$

$$\bar{N}_{25} = \frac{1}{EI_3} \left[ \frac{l^2 \cdot (x^1)^2}{40} - \frac{7L(x^1)^3}{24} + \frac{(x^1)^4}{24} - \frac{(x^1)^5}{120l} \right]$$

$$\bar{N}_{26} = \frac{1}{EI_3} \left[ \frac{l^2 \cdot (x^1)^2}{60} - \frac{L(x^1)^3}{40} + \frac{(x^1)^5}{120l} \right]$$

$$N_{33} = \frac{1}{EI_2} \left[ \frac{l^2 \cdot (x^1)^2}{40} - \frac{7L(x^1)^3}{120} + \frac{(x^1)^4}{24} - \frac{(x^1)^5}{120l} \right]$$

$$\bar{N}_{34} = \frac{1}{EI_2} \left[ \frac{l^2 \cdot (x^1)^2}{60} - \frac{L(x^1)^3}{40} + \frac{(x^1)^5}{120l} \right]$$

$$\bar{N}_{47} = \frac{1}{GI_D} \left[ \frac{1x^1}{3} - \frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6l} \right]$$

$$\bar{N}_{48} = \frac{1}{GI_D} \left[ \frac{1x^1}{6} - \frac{(x^1)^3}{6l} \right]$$

(5.125)

من توابع الانتقالات هذه والمثلة بالعلاقة (5-109) يجزئها المتجانس المفصل في العلاقة (5-33) وجزئها غير المتجانس المفصل بالعلاقات (5-125) , (5-124) يمكن باستخدام العلاقات (5-23) اشتقاق توابع تقريبية لقوى المقطع محققة لمعادلات التوازن الداخلية ضمن العنصر، ويترك للقارئ اشتقاق مثل هذه التوابع. وهذه التوابع المشتقة يمكن استخدامها للتطبيق المحين من نموذج الاجهادات الوارد في الفقرة (5-5). والخوارزميات الواردة في هذه الفقرة سارية المفعول تماماً لمثل هذا التطبيق دون أي تغيير والاختلاف الوحيد يظهر في كون عناصر المصفوفة  $\bar{p}_k^i$  في العلاقة (5-73) مختلفة عن نظيرها في التوابع المشتقة هنا.

أما في استخدام توابع الانتقالات المشتقة هنا في تطبيق طريقة العناصر المنتهية -نموذج الانتقالات فيظهر اختلاف في تقييم طاقة التشوه الداخلية للعنصر المنتهي نتيجة وجود جزء غير متجانس في

توابيع الانتقالات وستعرض في الفقرة التالية هذا التطبيق بإيجاز دون أن نعطي تفاصيل التكاملات الواردة، و يترك للقارئ كمبرين إيجاز هذه التكاملات .

### 5-6-3- استخدام توابيع تقريبية متعلقة بمحولات العنصر في نموذج الانتقالات:

على غرار العلاقة (5-35) يقيم شعاع مشتقات التوابيع التقريبية للانتقالات الواردة في العلاقة (5-109)، و من ثم يمكن تعيين مؤثرة التشوهات المختصرة لنقطة لا على التمييز من مقطع القضيبي الإطارى الفراغى فنحصل على :

$$\varepsilon_{ij} = \bar{x}_{ij}^i (Nd_i^{m(p)} \cdot u_{m(p)} + \bar{Nd}_i \cdot \bar{p}^i) \quad (5-126)$$

$$\varepsilon_{ij} = \bar{x}_{ij}^i (Nd_i^{s(q)} \cdot u_{s(q)} + \bar{Nd}_i \cdot \bar{p}^s)$$

حيث  $\bar{Nd}_m, Nd_i^{s(q)}$  أو  $\bar{Nd}_i, Nd_i^{m(p)}$  مشتقة من مثيليهما  $\bar{Nd}_m, Nd_i^{s(q)}$  أو  $\bar{Nd}_i, Nd_i^{m(p)}$  الواردة على التوالي في العلاقة (5-109) بعد استبدال قرائن بأخرى، و  $\bar{x}_{ij}^i$  أو  $\bar{x}_{ij}^s$  مماثلة لـ  $\bar{x}_{ij}^i$  الواردة في العلاقة (5-21)، أما  $\bar{p}^i$  أو  $\bar{p}^s$  فهو شعاع شدة الحملات الخارجية على المقديتين (k),(i) كالشعاع  $\bar{p}^i$  الوارد في العلاقة (5-122) .  
و تصبح طاقة التشوه الداخلية :

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ij} \cdot c^{[ij]} \varepsilon_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (Nd_i^{s(q)} \cdot u_{s(q)} + \bar{Nd}_i \cdot \bar{p}^s) \left( \int_0^1 \bar{x}_{ij}^i \cdot c^{[ij]} \cdot \bar{x}_{ij}^i dA \right) \cdot (Nd_i^{m(p)} \cdot u_{m(p)} + \bar{Nd}_i \cdot \bar{p}^i) \cdot dx^i \\ &= \frac{1}{2} \cdot u_{s(q)} \cdot K^{s(q)m(p)} \cdot u_{m(p)} + u_{s(q)} \cdot \bar{f}p^{s(q)} + c_i \end{aligned} \quad (5-126)$$

حيث :

$$K^{s(q)m(p)} = \int_0^1 Nd_i^{s(q)} \cdot E^i \cdot Nd_i^{m(p)} \cdot dx^i \quad (5-127)$$

$$\bar{f}p^{s(q)} = \frac{1}{2} \int_0^1 (Nd_i^{s(q)} \cdot E^i \cdot \bar{Nd}_i \cdot \bar{p}^i + \bar{Nd}_i \cdot \bar{p}^s \cdot E^i \cdot Nd_i^{m(p)}) \cdot dx^i \quad (5-128)$$

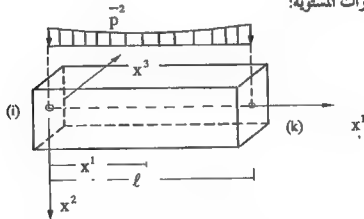
$$c_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{N} d\eta \cdot \bar{p}^a \cdot E^a \cdot \bar{N} d\eta \cdot \bar{p}^l \cdot dx^1 \quad (5-129)$$

$E^a$  مصفوفة مكافئة لمثلثتها المحسوبة في العلاقة (5-38) ومساوية لتلك المنحزة في العلاقة (5-23) ، و  $c^{III}$  هي كتلك الواردة في العلاقة (5-22) كما أن مصفوفة قساوة العنصر الناتجة عن التكامل (5-127) مكافئة لمثلثتها الواردة في العلاقة (5-40) .

أما بقية حدود الطاقة الكامنة فلا يطرأ عليها أي تعديل. و بالتالي فالتغير الذي يطرأ على خوازميات طريقة الانتقالات يتمثل في إضافة الحد (5-128) إلى تعبير الطاقة الكامنة. إذا التعبير (5-129) يتعدم بعد أخذ المتغير الأول لانتقالات العقد باعتبارها قيمة معلومة .

و في ختام هذا الفصل سوف نستعرض نتائج الطرق الثلاث الواردة في الفقرات (5-4) (5-5) (5-6) لتطبيق طريقة العناصر المنتهية على الإطارات المستوية.

#### 5-7- الإطارات المستوية:



شكل 5-10: مستوي الحملات الخارجية  $x^1 x^2$

عند تطبيق الحملات الخارجية على المنشآت الإطارية في مستوي واحد، و ليكن المستوي  $x^1 x^2$  شكل (5-10)، لا تكفي مركبات الانتقال  $u_1, u_2$  لنقطة ما لا على التحمين من مقطع القضيب لتحديد الحالة الانتقالية للقضيب. و ذلك باعتبار أن الانتقالات تحدث فقط في المستوي  $x^1 x^2$ ، و بالتالي يكون تغير موضع أي نقطة من القضيب بالنسبة للمحور  $x^3$  مساو للصفر ( $u_3=0$ ) . و هنا يعني أن دوران المقطع حول  $x^2$  مساو للصفر أيضا ( $\varphi_2 = 0$ ) انظر العلاقة (5-3) ، كما يجب

أن يكون دوران المقطع حول  $x^1$  معلوم ( $\varphi_1 = 0$ ) وذلك لأن دوران المقطع حول  $x^1$  يؤدي إلى انتقال في اتجاه  $x^3$  (انظر المعادلة الثانية من العلاقات (5-1) ) و يبقى للمقطع حرية الدوران حول المحور  $x^3$  ، و عليه يمكن تعيين الحالة الانتقالية تماما بتعيين انتقالي مركز ثقل المقطع  $u_2^0, u_1^0$  و دوران المقطع  $\varphi_3$  و يتبقى من العلاقات (5-1) المعادلتين التاليتين :

$$u_1 = u_1^0 - \varphi_3 \cdot x^2 \quad (5-130)$$

$$u_2 = u_2^0$$

و دوران المقطع حول  $x^2$  بحسب بدلالة الانتقال  $u_3^0$

$$\varphi_3 = \frac{du_2^0}{dx^1} \quad (5-131)$$

أما جزء متوترة التشوهات فتقتصر على التشوه الناطعي  $\varepsilon_{11}$  إذ أن التشوهين  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$  مكلفين للصفر و ذلك لأن :

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} = -\varphi_3 + \varphi_3 = 0 \quad (5-132)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} = 0 \quad (5-133)$$

فالاتقال  $u_1^0$  و الدوران  $\varphi_3$  في العلاقة (5-130) يفترض أنهما تابعة للإحداثي  $x^1$  فقط .

و بناء على ذلك يتم تحديد الحالة الإجهادية بالإجهاد  $\sigma^{11}$  ، أما قوى المقطع فتتخلص لتشمل القوة الناطمية  $N^1$  (العلاقة (5-9) ) و عزم الانعطاف  $M^3$  (العلاقة (5-10) ) و عليه تكون معادلات التوازن الداخلية ممثلة بالمعادلتين الأولى و الثالثة من العلاقة (5-16) .

بالنسبة لعلاقات التشوهات-الانتقالات فتقتصر على العلاقة :

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1^0}{dx^1} - x^2 \frac{d^2 u_2^0}{(dx^1)^2} = \left[ 1 \quad x^2 \right] \begin{bmatrix} \frac{du_1^0}{dx^1} \\ \frac{d^2 u_2^0}{(dx^1)^2} \end{bmatrix} \quad (5-134)$$

$$= \bar{x}_{11}^j \cdot \chi_j$$

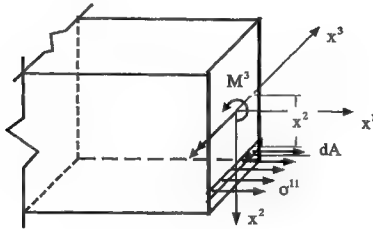
و قانون السلوك يقتصر على العلاقة :

$$\sigma^{11} = E \cdot \varepsilon_{11} \quad (5-135)$$

و تصبح علاقات قوى المقطع -الانتقالات مكافئة لما يلي :

$$\begin{bmatrix} N^1 \\ M^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1^0}{dx^1} \\ -\frac{d^2u_2^0}{(dx^1)^2} \end{bmatrix} \quad (5-136)$$

$$M^1 = E^q \cdot \chi_1$$



شكل 5-11: العزم الموجب  $M^3$

وإشارة العزم للمختارة السموجة هي تلك المتفقة مع العزم الموجب في مقاومة المواد والذي يسبب شداً للألياف السفلية (الدخالية) و ضغطاً في الألياف العلوية (شكل 5-11) .  
يمكن الآن إنجاز التطبيقات الثلاث لطريقة العناصر المنتهية المشروحة مفصلاً في الفقرات (5-4) (5-5) (5-6) مع اعتبار التبسيط الحاصل في هذه الفقرة ولا داعي لإعادة هذه التفاصيل مرة أخرى. ويكتفى الآن بذكر مصفوفة القساوة الناتجة عن مثل هذه التطبيقات و شعاع القوى المركزة على العقد المكافئ للحمولات الخارجية الموزعة بانتظام . و ذلك في حالة استخدام نفس التوابع التقريبية لمركبات الانتقال أو مركبات قوى المقطع . فمصفوفة القساوة تقتصر على المصفوفة :

$$k^{(p)(q)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_3}{l^3} & \frac{6EI_3}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_3}{l^3} & \frac{6EI_3}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_3}{l^2} & \frac{2EI_3}{l} & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & \frac{2EI_3}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_3}{l^3} & -\frac{6EI_3}{l^2} & 0 & \frac{12EI_3}{l^3} & -\frac{6EI_3}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_3}{l^2} & \frac{2EI_3}{l} & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & \frac{2EI_3}{l} \end{bmatrix}$$

(5-137)

و شعاع القوى المركزة على العقد المكافئ لحمولات خارجية خطية  $(\bar{n}^1, \bar{p}^2)$  موزعة بانتظام على طول القضيب (i)(k) يتمثل في الشعاع :

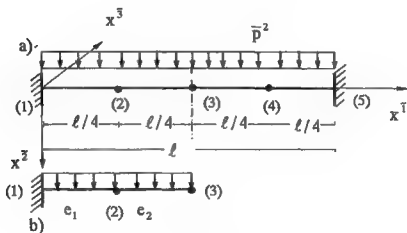
$$\bar{f}^{(q)} = \left[ \bar{n}^1 \frac{l}{2} \quad \bar{p}^2 \frac{l}{2} \quad \bar{p}^2 \frac{l^2}{12} \quad \bar{n}^1 \frac{l}{2} \quad \bar{p}^2 \frac{l}{2} \quad -\bar{p}^2 \frac{l^2}{12} \right] \quad (5-138)$$

و هذه النتائج هي نفسها للتطبيقات الثلاث لطريقة العناصر المنتهية .  
و على هذا الأساس تكون جملة المعادلات الخطية النهائية لكامل المنشأ الإطاري واحدة في التطبيقات الثلاثة . إلا أن اختلاف الحسابات عن بعضها البعض يظهر أثناء حساب الانتقالات ضمن العنصر و حسابات القوى الداخلية على المستوى العنصر و المثال التالي سيوضح هذه الاختلافات .

مثال 5-1:

يطلب حساب الانتقالات و قوى المقطع بجائز موثوق من الطرفين، طوله  $L$  و صلابته ثابتة  $EI$  مقسم إلى أربعة عناصر منتهية (شكل م-5-1) و يتعرض لحمولة خطية موزعة بانتظام على كامل الطول شدتها  $p$  . و ذلك باستخدام التطبيقات الثلاثة المذكورة في الفقرات 5-4، 5-5، 6-5 .

يقسم الجائز إلى أربعة عناصر منتهية  $l_1, l_2, l_3, l_4$  أطوالها متساوية و طول كل منها  $(l/4)$ ، تستخدم خاصية التناظر للإقلال من عدد المجاهيل إذ يكفي محل نصف الجائز اليساري . و تكون الانتقالات والقوى في النصف اليميني مكافئة لتثيلاتها في النصف اليساري. يجب الانتباه هنا إلى الشروط الطرفية كقيم الانتقالات و الدورانات في العقدة (1) (الوثاقة) معلومة. أما في العقدة التي يمر بها محور التناظر (3) فالدوران فيها معلوم  $(\varphi_{3(3)} = 0)$ .



شكل م 1-5 : جائز موثوق من الطرفين (a) المحاور الإحداثية ،  
التقسيم إلى عناصر منتهية ، الحملات (b) استخدام خاصية التناظر

ينسب الجائز إلى جملة محاور إحداثية عامة. و ينسب كل عنصر إلى جملة محاور إحداثية خاصة به. و في هذه الحالة تكون الجملتان متطابقتان و مصفوفة التحويل تكون مكافئة للمصفوفة الواحدة. تشكل مصفوفة القساوة الخاصة بكل عنصر في الجملة الإحداثية الخاصة وفق العلاقة (5-137) و يشكل شعاع القوى المركزة على العقد المكافئ للحمولة الموزعة وفق العلاقة (5-138) و تجمع على كامل الجملة بعد نسبها إلى المحاور الإحداثية العامة فتشكل لدينا جملة المعادلات الخطية النهائية بعد معالجة الشروط الطرفية و هذه الجملة تلتخص في جملة المعادلات التالية :



$$\frac{64EI_2}{1} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 \\ 0 & 1^2 & -6 \\ -12 & -\frac{6}{4} & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2(2)}^0 \\ \varphi_{3(2)} \\ u_{2(3)}^0 \end{bmatrix} = \bar{p}^2 \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بحل هذه المعادلات نحصل على انتقالات العقد المجهولة:

$$\begin{bmatrix} u_{2(2)}^0 \\ \varphi_{3(2)} \\ u_{2(3)}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} \frac{\bar{p}^2 l^4}{384EI_3} \\ \frac{\bar{p}^2 l^3}{128EI_3} \\ \frac{\bar{p}^2 l^4}{384EI_3} \end{bmatrix}$$

حساب الانتقالات ضمن العناصر و قوى المقطع لنموذج الانتقالات.

العنصر  $e_1$  . يعطى التابع التقريبي للانتقالات ضمن العنصر  $e_1$  بالعلاقة :

$$u_2^0 = \left[ 1 - 3 \frac{(x^1)^2}{l^2} + 2 \frac{(x^1)^3}{l^3} \right] x^1 - 2 \frac{(x^1)^2}{l} + \frac{(x^1)^3}{l^2} \left[ 3 \frac{(x^1)^2}{l^2} - 2 \frac{(x^1)^3}{l^3} - \frac{(x^1)^2}{l} + \frac{(x^1)^3}{l^2} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{16} \frac{\bar{p}^2 l^4}{384EI_3} \\ \frac{\bar{p}^2 l^3}{128EI_3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\bar{p}^2}{384EI_3} [15(x^1)^2 l^2 - 24(x^1)^3 l]$$

وبهذا التابع يمكن حساب الانتقالات في أي نقطة من العنصر  $e_1$  بتعويض إحداثي هذه النقطة  $x^1$

الذي يتحول من 0 إلى  $\frac{l}{4}$  . في العلاقة السابقة، يجري حساب قوى المقطع باستخدام علاقات

قوى المقطع-الانتقالات و عليه يكون تابع العزم  $M^3$  و تابع القوة القاصة  $Q^2$  مساويين لما يلي:

$$M^3 = -\frac{\bar{P}^2}{384} [30l^2 - 144(x^1)l]$$

$$Q^2 = \frac{\bar{P}^2}{384} .144l$$

و يجري حساب العزم  $M^3$  و القوة الفاصلة  $Q^2$  في أي نقطة يتميخ إحداثياتها  $x^1$  في التوابع السابقة و هي في العقدة (1) حيث  $x^1 = 0$  مساوية لـ:

$$M_{(1)}^3 = -0.078125 . \bar{P}^2 l^2$$

$$Q_{(1)}^2 = 0.375 . \bar{P}^2 l$$

و هي في العقدة (2) حيث  $x^1 = \frac{1}{4}$  مساوية لـ:

$$M_{(2)}^3 = -0.015625 . \bar{P}^2 l^2$$

$$Q_{(2)}^2 = 0.375 . \bar{P}^2 l$$

العنصر  $e_2$  :

يعطى التابع التقريبي للانتقالات ضمن العنصر  $e_2$  بالعلامة :

$$u_2^0 = \left[ 1 - 3 \frac{(x^1)^2}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} + 2 \frac{(x^1)^3}{\left(\frac{l}{4}\right)^3} \quad x^1 - 2 \frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(x^1)^3}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} \quad 3 \frac{(x^1)^2}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} - 2 \frac{(x^1)^3}{\left(\frac{l}{4}\right)^3} \quad -\frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(x^1)^3}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} \right] \begin{bmatrix} 9 \bar{P}^2 l^4 \\ 16384 EI_3 \\ \frac{\bar{P}^2 l^3}{128 EI_3} \\ \frac{\bar{P}^2 l^4}{384 EI_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{\bar{P}^2}{384 EI_3} \left[ \frac{9}{16} l^4 + 3(x^1)l^3 - 3(x^1)^2 l^2 - 8(x^1)^3 l \right]$$

وعليه تكون توابع قوى المقطع :

$$M^3 = -\frac{\bar{p}^2}{384} [6l^2 - 48(x^1)l]$$

$$Q^2 = \frac{\bar{p}^2}{384} \cdot (48l)$$

و في العقدة (2) حيث  $x^1 = 0$  يكون :

$$M_{(2)}^3 = 0.015625 \cdot \bar{p}^2 l^2$$

$$Q_{(2)}^2 = 0.125 \cdot \bar{p}^2 l$$

و في العقدة (3) حيث  $x^1 = \frac{1}{4}$  يكون :

$$M_{(3)}^3 = 0.046875 \cdot \bar{p}^2 l^2$$

$$Q_{(3)}^2 = 0.125 \cdot \bar{p}^2 l$$

يلاحظ في هذا الحل أن قيم انتقالات العقد الناتجة مطابقة للحل الدقيق، أما بالنسبة لقيم العزوم فلا تتطابق مع الحل الدقيق، و الخطأ الناتج عن الحل بطريقة العناصر المنتهية-نموذج الانتقال يبلغ 6.25% من قيمة العزم عند عقدة الاستناد (1) و 25% من قيمة القوة القاصة عند العقدة نفسها. و يلاحظ أيضاً أن تابع القوة القاصة لا يتمتع بالاستمرارية؟ إذ أن حسابات القوة القاصة في العقدة (2) التي يشترك بها العنصران  $e_1, e_2$  مختلفة عن بعضها البعض عند حسابها من العنصر  $e_1$  و من العنصر  $e_2$ .

مثال 5-2: حل المثال السابق وفق التطبيق المجهين-نموذج الاجهادات:

فلنا أن جملة المعادلات الخطية للجائز في هذا التطبيق مطابقة تماماً لمثليتها في المثال السابق و بالتالي انتقالات العقد المجهولة مطابقة أيضاً للمثال السابق . بعد حساب المجاهيل في المحاور الإحداثية العامة يمكن الآن دراسة كل عنصر من عناصر الجائز .

العنصر  $e_1$  :

نحول أولاً انتقالات عقد العنصر  $e_1$  من المحاور الإحداثية العامة إلى المحاور الإحداثية الخاصة بالعنصر . بعد ذلك يمكن في مستوي العنصر حساب المجاهيل وفق العلاقة :

$$\beta_i = H_{ij}(-\bar{H}_j^k \beta^k + T^k) u_j$$

و كل المصفوفات أو الأشعة الواردة في العلاقة السابقة مطورة في حالة عنصر اطارى فراغى و بالتالى فتعاصر هذه المصفوفات أو الأشعة لحالة إطار مستوي عتواة كلها في مثيلاتها من حالة العنصر الإطارى الفراغى، و على القارئ استخلاصها من حالة العنصر الإطاري الفراغى، أو تطويرها بنفسه للحالة المستوية بشكل شبيه لما ورد في الفقرة 5-5 . و يكتفى الآن بإعطاء النتيجة.

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \frac{\bar{p}^2}{EI_3} \begin{bmatrix} \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} & -\frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)} & \frac{3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} & -\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} \\ \frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} & \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} & -\frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} & \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{16} \cdot \frac{1^4}{384} \\ \frac{1^3}{128} \end{bmatrix} \cdot \frac{\bar{p}^2}{EI_3}$$

$$= \frac{\bar{p}^2}{EI_3} \begin{bmatrix} \frac{1^2}{24} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

و عليه يكون تابع العزم  $M^3$  مكافئاً لـ:

$$M^3 = EI_3 \left[ -2 \quad -6x^1 \right] \frac{\bar{p}^2}{EI_3} \begin{bmatrix} \frac{1^2}{24} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} + \left[ -\frac{(x^1)^2}{2} \right] \cdot \bar{p}^2$$

$$= \bar{p}^2 \left[ -\frac{1^2}{12} + \frac{(x^1)1}{2} - \frac{(x^1)^2}{2} \right]$$

و تابع القوة القاسمة  $Q^2$  :

$$Q^2 = \bar{p}^2 \left[ \frac{1}{2} - x^1 \right]$$

و قيمة هذه التوابع في العقدة (1) حيث  $x^1 = 0$  هي:

$$M_{(1)}^3 = -\bar{p}^2 \frac{l^2}{12}$$

$$Q_{(1)}^2 = \bar{p}^2 \frac{l}{2}$$

و في العقدة (2) حيث  $x^1 = \frac{l}{4}$ :

$$M_{(2)}^3 = -\bar{p}^2 \frac{l^2}{96}$$

$$Q_{(2)}^2 = \bar{p}^2 \frac{l}{2}$$

العنصر  $e_2$ :

في العنصر  $e_2$  لدينا:

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \frac{\bar{p}^2}{EI_3} \begin{bmatrix} \frac{1}{24} \left(\frac{l}{4}\right)^2 \\ -\frac{1}{12} \left(\frac{l}{4}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} & -\frac{2}{\left(\frac{l}{4}\right)} & \frac{3}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} & -\frac{1}{\left(\frac{l}{4}\right)} \\ \frac{2}{\left(\frac{l}{4}\right)^3} & \frac{1}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} & -\frac{2}{\left(\frac{l}{4}\right)^3} & \frac{1}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{16} \frac{l^4}{384} \\ \frac{l^3}{128} \\ \frac{l^4}{384} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\bar{p}^2}{EI_3}$$

$$= \frac{\bar{p}^2}{EI_3} \begin{bmatrix} -\frac{2l^2}{384} \\ \frac{16l^2}{384} \end{bmatrix}$$

و عليه يكون تابع العزم  $M^3$ :

$$M^3 = EI_3 \left[ -2 \quad -6x^1 \right] \frac{\bar{p}^2}{EI_3} \begin{bmatrix} -\frac{2l^2}{384} \\ \frac{16l^2}{384} \end{bmatrix} + \left[ -\frac{(x^1)^2}{2} \right] \bar{p}^2$$

$$= \bar{p}^2 \left[ -\frac{l^2}{96} + \frac{(x^1)l}{4} - \frac{(x^1)^2}{2} \right]$$

و تابع القوة القاصة :

$$Q^2 = \bar{p}^2 \left[ \frac{1}{4} - x^1 \right]$$

و قوى المقطع في العقدة (2) حيث  $x^1 = 0$  :

$$M_{(2)}^3 = -\bar{p}^2 \frac{1^2}{96}$$

$$Q_{(2)}^2 = \bar{p}^2 \frac{1}{4}$$

و في العقدة (3) حيث  $x^1 = \frac{1}{4}$  :

$$M_{(3)}^3 = -\bar{p}^2 \frac{1^2}{24}$$

$$Q_{(3)}^2 = 0$$

يلاحظ في هذا الحل أن قيم انتقالات العقد مطابقة للحل الدقيق. كما أن تابعي قوى المقطع للعزم والقوة القاصة يتمتعان بالاستمرارية و مطابقان للحل الدقيق و هذا يرجع إلى حسن اختيار التوابع التقريبية لقوى المقطع. و القارئ المتنبه سوف يلاحظ أن توابع قوى المقطع مشتقة أصلاً من توابع انتقالات تقريبية تحقق المعادلات التفاضلية للمسألة ضمن العنصر المنتهي .

مثال 3-5: الحل باستخدام التطبيق المقترح لنموذج الانتقالات مع اعتبار الحملولة:

في التطبيق المقترح تبقى جملة المعادلات الخطية النهائية مطابقة تماماً للمثالين السابقين و يختلف تابع الانتقالات التقريبي ضمن العنصر عن نظيره في التطبيق التقليدي لنموذج الانتقالات بوجود الحد غير المتجانس المتعلق بالحملولة. ننتقل الآن إلى حساب الانتقالات ضمن العناصر المنتهية و قوى المقطع فيها.

العنصر  $e_1$  :

يعطى الآن التابع التقريبي للانتقالات بالشكل:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{(x^1)^2}{(\frac{1}{4})^2} + 2\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^3} & x^1 - 2\frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^2} & 3\frac{(x^1)^2}{(\frac{1}{4})^2} - 2\frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^3} - \frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(x^1)^3}{(\frac{1}{4})^2} \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{16} \frac{\bar{p}^2 l^4}{384EI_3} \\ \frac{\bar{p}^2 l^3}{128EI_3} \end{bmatrix} + \frac{\bar{p}^2}{EI_3} \begin{bmatrix} \frac{(\frac{1}{4})^2 (x^1)^2}{24} - \frac{\frac{1}{4} (x^1)^3}{12} + \frac{(x^1)^4}{24} \end{bmatrix} = \frac{\bar{p}^2}{EI_3} \begin{bmatrix} \frac{l^3 (x^1)^2}{24} - \frac{l (x^1)^3}{12} + \frac{(x^1)^4}{24} \end{bmatrix}$$

و عليه تكون توابع قوى المقطع :

$$M^3 = \bar{p}^2 \left[ -\frac{l^2}{12} + \frac{l(x^1)}{2} - \frac{(x^1)^2}{2} \right]$$

$$Q^2 = \bar{p}^2 \left[ \frac{l}{2} - x^1 \right]$$

و في العقدة (1) حيث  $x^1 = 0$  يكون :

$$M_{(1)}^3 = -\bar{p}^2 \frac{l^2}{12}$$

$$Q_{(1)}^2 = \bar{p}^2 \frac{l}{2}$$

و في العقدة (2) حيث  $x^1 = \frac{l}{4}$  يكون :

$$M_{(2)}^3 = -\bar{p}^2 \frac{l^2}{96}$$

$$Q_{(2)}^2 = \bar{p}^2 \frac{l}{4}$$

العنصر  $e_2$  :

في العنصر  $e_2$  لدينا :

$$u_2^0 = \left[ 1 - 3 \frac{(x^1)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + 2 \frac{(x^1)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} \quad x^1 - 2 \frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(x^1)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \quad 3 \frac{(x^1)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - 2 \frac{(x^1)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} - \frac{(x^1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(x^1)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{16384} \bar{p}^4 \\ \frac{\bar{p}^3}{128 E_3} \\ \frac{\bar{p}^2}{384 E_3} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\bar{p}^2}{E_3} \left[ \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 (x^1)^2}{24} - \frac{\frac{1}{4} (x^1)^3}{12} + \frac{(x^1)^4}{24} \right]$$

$$= \frac{\bar{p}^2}{E_3} \left[ \frac{9}{16384} \frac{l^4}{l^4} + \frac{3^3 (x^1)}{384} - \frac{l^2 (x^1)^2}{192} - \frac{l (x^1)^3}{24} + \frac{(x^1)^4}{24} \right]$$

و بالتالي تكون توابع قوى المقطع :

$$M^3 = \bar{p}^2 \left[ -\frac{l^2}{96} + \frac{l(x^1)}{4} - \frac{(x^1)^2}{2} \right]$$

$$Q^2 = \bar{p}^2 \left[ \frac{1}{4} - x^1 \right]$$

و قوى المقطع في العقدة (2) حيث  $x^1 = 0$  يكون :

$$M_{(2)}^3 = -\bar{p}^2 \frac{l^2}{96}$$

$$Q_{(2)}^2 = \bar{p}^2 \frac{1}{4}$$

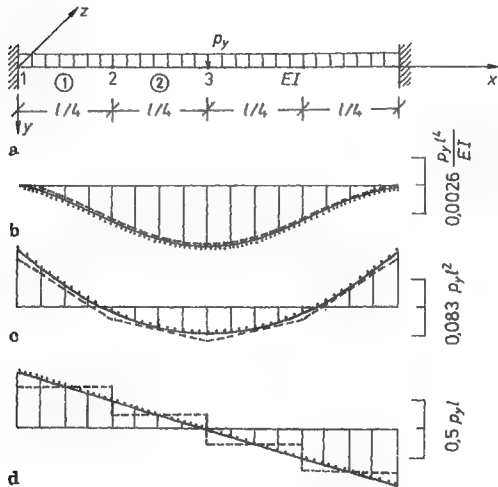
و في العقدة (3) حيث  $x^1 = \frac{1}{4}$  يكون :

$$M_{(3)}^3 = \bar{p}^2 \frac{l^2}{24}$$

$$Q_{(3)}^2 = 0$$



و يلاحظ في هذا الحل أن الانتقالات بالإضافة إلى قوى المقطع تتطابق مع الحل الدقيق . و الحلول الثلاثة ممثلة إلى جانب الحل الدقيق في الشكل (م-2-5)



شكل م-2-5: جاذز بسيط موثوق من الطرفين تحت تأثير حمولة عظمية موزعة بانتظام

الحظ المستمر : الحل الدقيق

الحظ المتقطع : الحل باستخدام نموذج الانتقالات

الخط المنقط : الحل باستخدام النموذج المجهن ، والنموذج المقترح للانتقالات المتعلقة

بالحمولات

المصادر العلمية المستخدمة:

1.Mueller,H. ; Jaeger, W.

Stabtragwerke (STATRA) Programmsystem ; Beitraege (4) ,  
Berechnung des Schnittkraft-und Verschiebungszustandes nach  
Elastizitaetstheorie I. und II.Ordnung sowie lineasierte  
Stabilitaetsuntersuchung raeumlicher Stabtragwerke , Baustein 8 des  
Programmsystems STATRA , Grundlagen und Beispiele , Bauforschung  
Baupraxis ,  
Bauinformation der DDR , Berlin 1982, H. 95

2.Mueller,H. ; Graf, W.

Stabtragwerke (STATRA) Programmsystem ; Beitraege (6) , lineare  
Kinetik von Stabtragwerken , Bausteine 4 und 7 des Programmsystems  
STATRA , Grundlagen und Beispiele , Bauforschung Baupraxis ,  
Bauinformation der DDR , Berlin 1984, H. 139

3..Tong , P. ; Mau ,S. T. ; Pian, T. H. H.

Derivation of geometric stiffness and mass matrices for finite element  
hybrid models, Int. J. Solids Structures , Vol 1-10, p. 919-932, Pergamon  
Press., England ,1974

4. Pian , T. H. H.

Element stiffness-matrices for boundary compatibility and for prescribed  
boundary stresses . in : Matrix Method 2 , Session 3, Finite element  
properties, Proceedings of conference on matrix methods in structural  
mechanics , held 26-28, Wright-Patterson AFE, Ohio, 1965.

5. Walder, U.

Beitrag zur Berchnung von Flaechentragwerken nach der Methode der  
Finiten Elemente, Institut fuer Baustatik und Konstruktion, ETH Zuerich,  
Bericht Nr. 77 ,1977.

6. Olson , D. M.

The mixed finite element method in elasticity and elastic contact problems , in: Hybrid and mixed finite element method , edited by S. N. Atluri, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, John Wiley & Sons, Chichester 1983, P. 19-47.

7. Wunderlich, W.

Mixed models for plates and shells, principles-elements-examples, in: Hybrid and mixed finite element method , edited by S. N. Atluri, R. H.

Gallagher and O. C.

Zienkiewicz, John Wiley & Sons, Chichester , Singapore, 1983, P. 215-239.

8. Abo Diab, S.

Entwicklung und Einsatz hybrider finiter Elemente fuer Aufgaben der linearen Statik und Kinetik von Stabtragwerkren kompakte gerade Staebe , Bauingenieur 66, P. 437-440 , Springer-Verlag, 1991.

9. Jerousek, J. ; Guex, L.

The hybrid Trefftz finite element model and its application to plate bending, Int. J. Num. Meth. Eng. , Vol. 13, P. 651-93, 1986.

10. Kolar, V. ; Kratochvil, J. ; Leitner, F. ; Zinesek, A.

Berechnung von Flaechen- und Raumtragwerken nach der Methode der finiten Elemente, Springer-Verlag , Wien New-York, 1975.

11. Klingmueller, O. ; Lawo, M. ; Thierauf, G.

Stabtragwerke , Matrizen Methoden der Statik und Dynamik , Teil 1 und 2 , Vieweg, Braunschweig, 1983.

12. Szilard, R.

Finite Berchnungsmethoden der Struktur Mechanik, Stabwerke Band 1, Verlag Ernst & Sohn , Berlin (W.), Muenchen, 1982.

13. Szilard, R. ; Ziesing, D. ; Pickhardt, S.

Basic-Programme fuer Baumechanik , Stabwerke Band 1, Verlag Ernst & Sohn , Berlin (W.), Muenchen, 1986.

14. Bathe, K.-J.

Finite-Element-Methoden, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo,1986

|

15. Abo Diab, S.

Direkte Zuordnung des Verschiebungs-und Schnittkraftzustands zum Belastungszustand bei Finite Elemente Displacementsmethode. In: Festschrift o. Prof. Dr.-Ing. Habil. H. Mueller 65. Jahre ehemalige Doktoranden gratulieren Technische Universitaet Dresden, 1994.

16. Abo Diab ,S.

DE-Variational Formulation and FEM Solution, Int. J. Num. Meth . Eng.,1992 (not published),Paper Nr.2130.

17. Abo Diab ,S.

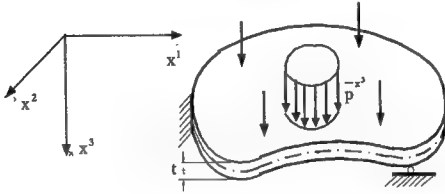
Differential equation variational formulation for plate bending, Int. J. Num. Meth . Eng.,1992 (not published),Paper Nr.2198.

18. Schiefner, R.

Geometrisch und physikalisch nichtlineare Statik räumlich wirkender Stäbe und Stabtragwerke aus homogenen Werkstoff bei kontinuierlicher Plastizierung- Ein Beitrag zum Programmsystem STATRA-FEM ,TU Dresden, Diss. B,1988.

## 6-عناصر منتهية لحل البلاطات الرقيقة

البلاطات الرقيقة هي منشآت مستوية ينحصر حجمها بين مستويين متوازيين البعد بينهما والذي هو سماكة البلاطة أصغر بعشرين مرة على الأقل من أصغر بعد لها. و على هذا الأساس يمكن الاستغناء عن دراسة البلاطة في الفراغ الثلاثي الأبعاد و الاكتفاء بدراستها في مستوى وسطي يمثل لمستوي البلاطة (المستوي المحدد بالخط المحوري) شكل (6-1) ويفترض أيضاً في طبيعة البلاطة أن تطبق الحمولات الخارجية عليها في مستويات عمودية على مستوى البلاطة. تخضع النظرية الكلاسيكية لدراسة البلاطات الرقيقة إلى جملة فرضيات تسهيلية توجز بما يلي :



شكل 6-1: بلاطة مستوية، المحاور الإحداثية، الحمولات، طبيعة الاستناد، المستوى الوسطي

1. إن انتقالات نقاط المستوي الوسطي للبلاطة صغيرة بالنسبة لسماكة البلاطة. بعد التشوه تشكل نقاط هذا المستوي سطحاً وسطياً يفترض أن تكون ميله صغيرة و بالتالي يمكن اعتبار مربع هذا الميل صغير جداً بالنسبة للواحد .
2. يفترض أن لا يحصل في السطح الوسطي للبلاطة تشوهات ، وهذا السطح الوسطي يسمى السطح المحايد للبلاطة.

3. تعتبر نظريات كيرشوف - لوف Kirchhoff - Love سارية المفعول . وهي تقتضي بأن تبقى المقاطع المستوية العمودية على السطح الوسطي قبل الانتقال مستوية و عمودية على السطح الوسطي بعد حصول الانتقال ، و هذه الفرضية مقابلة لمثيلتها التي افترضت أثناء دراسة الإطارات . يمكن اعتبار الاجهادات الناعمة على مستوى البلاطة صغيرة مقارنة بالاجهادات الأخرى الحاصلة ولذلك يمكن إهمالها .

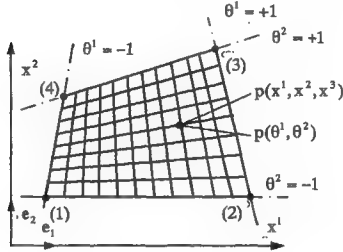
جرت العادة أن تتم دراسة البلاطات ذات الأشكال الهندسية البسيطة والمنتظمة في المستوي الديكارتي وتتعقد هذه الدراسة بتعقد الأشكال الهندسية للبلاطة أو كما يقال في حال وجود طوبولوجية هندسية معقدة . ويلجأ عندها عادةً إلى استخدام ما يسمى بالإحداثيات الطبيعية . وباعتبار أن استخدام الإحداثيات الطبيعية ساري المفعول أيضاً على الأشكال الهندسية البسيطة لذلك يفضل هنا منذ البداية استخدام الإحداثيات الطبيعية ولهذا لا بد من البدء بالتعرف على هذه الإحداثيات وإثبات علاقات التحويل بينها وبين الإحداثيات الديكارتية . والفقرة التالية ستعرفنا ببعض المصطلحات اللازمة لتحقيق مثل هذا الغرض .

#### 6-1- استخدام التوابع التقريبية في التحويل بين الإحداثيات الطبيعية (المنحنية) والديكارتية

##### 6-1-1- الإحداثيات الطبيعية (المنحنية) واختيار التوابع التقريبية

من الإحداثيات المنحنية المعروفة والمستخدمة بكثرة يمكن أن نذكر الإحداثيات الكروية و الإحداثيات الأسطوانية . يتم تحديد نقطة ما من قشرة كروية أو قشرة أسطوانية تحديداً تاماً بمعرفة إحداثياتها الكروية أو إحداثياتها الأسطوانية و هناك علاقة تحليلية دقيقة تربط بين الإحداثيات الديكارتية من جهة وكل من الإحداثيات الأسطوانية والكروية من جهة أخرى . وباستخدام هذه العلاقات التحليلية يمكن الانتقال إلى الإحداثيات الديكارتية بسهولة . في بعض أنواع الإحداثيات الطبيعية لا توجد هناك علاقات تحليلية دقيقة تربط بين الإحداثيات الطبيعية و الإحداثيات الديكارتية و لذلك يلجأ إلى استخدام التوابع التقريبية لإيجاد مثل هذه العلاقات . لنقتطع الآن من

البلاطة للمبينة في الشكل (6-1) عنصراً على شكل شبه منحرف شكل (6-2)، رؤوسه ممثلة بالعقد (1)، (2)، (3)، (4)، ومنسوب إلى جملة الإحداثيات الديكارتية  $x^1, x^2$  بأشعتها الواحدية  $e_1, e_2$ . شبه المنحرف هذا معين تماماً بإحداثيات رؤوسه والتي هي على التوالي:

$$(x^1(1), x^2(1)), (x^1(2), x^2(2)), (x^1(3), x^2(3)), (x^1(4), x^2(4))$$


شكل (6-2): الإحداثيات الطبيعية لشبه المنحرف

لنعتبر الآن الإحداثيات الطبيعية  $(\theta^1, \theta^2)$  بحيث يكون الأحداثي الطبيعي  $\theta^1$  على طول حريف شبه المنحرف (1)(2) ثابتاً ويساوي 1 - وعلى الحريف المقابل ثابتاً أيضاً ويساوي 1 +، و الإحداثي الطبيعي  $\theta^2$  على طول الحريف (1)(4) ثابتاً ويساوي أيضاً 1 - وعلى الحريف المقابل له (2)(3) مساوياً 1 +. و بالتالي يمكن رسم شبكة من الخطوط (في الحالة العامة غير متوازية) إحداثياتها الطبيعية  $(\theta^1, \theta^2)$  تتحول بين القيمتين 1-، 1+. ويمكن تعيين أي نقطة P من شبه المنحرف باعتبارها نقطة تقاطع خطين مستقيمين الأول منهما فيه  $\theta^1$  ثابتة و  $\theta^2$  تتحول بين القيمتين 1-، 1+ والثاني فيه  $\theta^2$  ثابتة و قيمة  $\theta^1$  تتحول بين القيمتين 1-، 1+، أو باختصار بالإحداثيات الطبيعية  $p(\theta^1, \theta^2)$  وبالتالي تكون لرؤوس شبه المنحرف على التوالي الإحداثيات الطبيعية  $(1, -1), (2, 1), (3, 1), (4, -1)$ .

لنفرض أن النقطة P معينة أيضا بأحداثها الديكارتية  $p(x^1, x^2)$ . علينا الآن إيجاد علاقة تقريبية تربط بين الإحداثيات الطبيعية والإحداثيات الديكارتية . لهذا الفرض نفرض أننا نستطيع حساب الإحداثيات الديكارتية بالتوابع التقريبية التالية :

$$\begin{aligned} x^1 &= \begin{bmatrix} 1 & \theta^1 & \theta^2 & \theta^1 \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \end{bmatrix} \\ x^2 &= \begin{bmatrix} 1 & \theta^1 & \theta^2 & \theta^1 \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \\ c_4^2 \end{bmatrix} \\ x^i &= \theta^a c_a^i \end{aligned} \quad (6.1)$$

حيث  $c_a^i$  ثوابت اختيارية ليس لها إلى الآن أي صيغة هندسية ويجب تعيينها .  
 $\theta^a$  التابع التقريبي في  $\theta^1, \theta^2$  هذا الاختيار شبيه بما ورد في طريقة العناصر المنتهية وبجواب أن يكون عدد الثوابت الاختيارية بحيث يمكن تحديدها. لتعين هذه الثوابت الاختيارية نستخدم المحاكمة المنطقية التالية : إذا كانت هذه التوابع يمكننا فعلاً من حساب الإحداثيات الديكارتية لنقطة ما إذا ما علمت إحداثياتها الطبيعية فإن تعويض الإحداثيات الطبيعية لرؤوس شبه المنحرف في هذه العلاقات يجب أن يعطي الإحداثيات الديكارتية لهذه الرؤوس وبالتالي يكون :

$$\begin{bmatrix} x_{(1)}^1 \\ x_{(2)}^1 \\ x_{(3)}^1 \\ x_{(4)}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_4^1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_{(1)}^2 \\ x_{(2)}^2 \\ x_{(3)}^2 \\ x_{(4)}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2_1 \\ c^2_2 \\ c^2_3 \\ c^2_4 \end{bmatrix}$$

$$x_{(k)}^i = \bar{\theta}_{\alpha k}^{\alpha} c^i_{\alpha}; (k)=(1),(2),(3),(4) \quad (6-2)$$

والمعادلات السابقة يمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية بدلالة الإحداثيات الديكارتية لرؤوس شبكة المنحرف. بعد حل هذه للمعادلات نحصل على :

$$\begin{bmatrix} c^1_1 \\ c^1_2 \\ c^1_3 \\ c^1_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1)}^1 \\ x_{(2)}^1 \\ x_{(3)}^1 \\ x_{(4)}^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c^2_1 \\ c^2_2 \\ c^2_3 \\ c^2_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1)}^2 \\ x_{(2)}^2 \\ x_{(3)}^2 \\ x_{(4)}^2 \end{bmatrix}$$

$$c^i_{\alpha} = \hat{\theta}_{\alpha}^{(k)} x^i_k$$

$$(6.3)$$

وبتعميؤ هذه العلاقات في العلاقات (6-1) نحصل على العلاقات المرغوبة التي تربط بين الإحداثيات الطبيعية لنقطة ما لا على التعيين والإحداثيات الديكارتية وهذه العلاقات هي:

$$x^i = \theta^{\alpha} \hat{\theta}^{(k)}_{\alpha} x^i_k = \Omega^{(k)} x^i_k \quad (6.4)$$

حيث  $\Omega^{(k)}$  هي توابع الشكل.

تتألف العلاقات (6-4) مفصلة من معادلتين هما :

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} \Omega^{(1)} & \Omega^{(2)} & \Omega^{(3)} & \Omega^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1_{(1)} \\ \mathbf{x}^1_{(2)} \\ \mathbf{x}^1_{(3)} \\ \mathbf{x}^1_{(4)} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} \Omega^{(1)} & \Omega^{(2)} & \Omega^{(3)} & \Omega^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^2_{(1)} \\ \mathbf{x}^2_{(2)} \\ \mathbf{x}^2_{(3)} \\ \mathbf{x}^2_{(4)} \end{bmatrix}$$

حيث :

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \frac{1}{4}(1 - \theta^1)(1 - \theta^2) & \Omega^{(2)} &= \frac{1}{4}(1 + \theta^1)(1 - \theta^2) \\ \Omega^{(3)} &= \frac{1}{4}(1 + \theta^1)(1 + \theta^2) & \Omega^{(4)} &= \frac{1}{4}(1 - \theta^1)(1 + \theta^2) \end{aligned} \quad (6.6)$$

هي توابع الشكل الآتية الذكر.

## 6-1-2 شعاع المكان لنقطة ما لا على التعين من شبه المنحرف

يعطى شعاع المكان لنقطة ما لا على التعين  $P(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$  في الإحداثيات الديكارتية بالعلاقة :

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}^1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{x}^2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{x}^3 \mathbf{e}_3 \quad (6.7)$$

وبالتالي يمكن حساب شعاع المكان لأي نقطة من شبه المنحرف إذا ما أعطيت الإحداثيات الديكارتية لهذه النقطة . و في الحالة التي تعطى فيها الإحداثيات الطبيعية لهذه النقطة و الإحداثيات الديكارتية لرؤوس شبه المنحرف يمكن حساب شعاع المكان بالعلاقة :

$$\mathbf{r} = \Omega^{(k)} \mathbf{x}^1_{(k)} \mathbf{e}_1 \quad (6.8)$$

و ذلك بعد ملاحظة العلاقة (6.4) . و باعتبار  $r_{(k)}$  أشعة المكان لرؤوس شبه المنحرف نجد أن:

$$r_{(k)} = x^{(k)} e_i \quad (6.9)$$

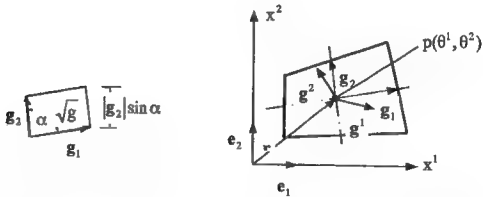
و بالتالي يمكن كتابة العلاقة (6.8) بالشكل:

$$r = \Omega^{(k)} r_{(k)} \quad (6.10)$$

أي أنه يمكن إيجاد شعاع المكان لنقطة ما لا على التعيين من شبه المنحرف بمعرفة الاحداثيات الطبيعية لهذه النقطة و الاحداثيات الديكارتية لرؤوسه .

### 6-3-1- أشعة القاعدة الأساسية :

تسمى الأشعة غير الواحدة المماسة للخطوط الاحداثية الطبيعية في نقطة ما  $P(\theta^1, \theta^2)$  بأشعة القاعدة الأساسية . و الشعاع  $g_1$  المماس للخط الاحداثي الطبيعي  $\theta^1$  و الذي عليه  $(\theta^2 = \text{const})$  هو المشتق الجزئي لشعاع المكان بالنسبة للاحداثي  $\theta^1$  ، و الشعاع  $g_2$  المماس للخط الاحداثي الطبيعي  $\theta^2$  و الذي عليه  $\theta^1 = (\text{const})$  هو المشتق الجزئي لشعاع المكان بالنسبة للاحداثي  $\theta^2$  شكل (6.3).



شكل 4-6 : العنصر المساحي  $\sqrt{g}$

شكل (6.3): أشعة القاعدة الأساسية وأشعة

القاعدة الضدية في نقطة ما لا على التعيين

و التعبير الرياضي عن هذا التعريف هو :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^1} = \mathbf{r}_{,1} \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^2} = \mathbf{r}_{,2} \end{aligned} \quad (6.11)$$

هاتان العلاقتان يمكن تجميعهما بالعلاقة الوحيدة التالية :

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} \quad (6.12)$$

و القرينة  $\alpha$  تتحول على الاحداثيات الطبيعية في الأسفل و عادة نختار الأحرف اليونانية كقرائن تتحول على الاحداثيات الطبيعية و الأحرف اللاتينية كقرائن تتحول على الاحداثيات الديكارتية . و الحساب التفصيلي لهذه الأشعة يتم بتعويض العلاقة (6.10) في العلاقة (6.12) و من ثم تعويض العلاقة (6.9) في العلاقة الناتجة فنحصل على :

$$\mathbf{g}_\alpha = \Omega^{(k),\alpha} \mathbf{r}(k) = \Omega^{(k),\alpha} x^i(k) \mathbf{e}_i = g^i_\alpha \mathbf{e}_i \quad (6.13)$$

و مركبات هذه الأشعة في اتجاه المحورين الاحداثيين الديكارتين هي :

$$g^i_\alpha = \Omega^{(k),\alpha} r^i(k) \quad (6.14)$$

و بما أن  $(k)$  تتحول على العقد (4)، (3)، (2)، (1) و  $\alpha$  هي المشتق بالنسبة للإحداثيات الطبيعية  $\theta^1, \theta^2$  على التوالي فالتوابع  $\Omega^{(k),\alpha}$  تتألف من ثمانية توابع هي :

$$\begin{aligned} \Omega^{(1),1} &= -\frac{1}{4}(1-\theta^2) & \Omega^{(1),2} &= -\frac{1}{4}(1-\theta^1) \\ \Omega^{(2),1} &= \frac{1}{4}(1-\theta^2) & \Omega^{(2),2} &= -\frac{1}{4}(1+\theta^1) \\ \Omega^{(3),1} &= \frac{1}{4}(1+\theta^2) & \Omega^{(3),2} &= \frac{1}{4}(1+\theta^1) \\ \Omega^{(4),1} &= -\frac{1}{4}(1+\theta^2) & \Omega^{(4),2} &= \frac{1}{4}(1-\theta^1) \end{aligned} \quad (6.15)$$

ومفكوك العلاقة (6-13) يمثل في:

$$g_1 = (\Omega^{(1)}_{,1}x^1_{(1)} + \Omega^{(2)}_{,1}x^1_{(2)} + \Omega^{(3)}_{,1}x^1_{(3)} + \Omega^{(4)}_{,1}x^1_{(4)})e_1 + (\Omega^{(1)}_{,1}x^2_{(1)} + \Omega^{(2)}_{,1}x^2_{(2)} + \Omega^{(3)}_{,1}x^2_{(3)} + \Omega^{(4)}_{,1}x^2_{(4)})e_2$$

$$g_2 = (\Omega^{(1)}_{,2}x^1_{(1)} + \Omega^{(2)}_{,2}x^1_{(2)} + \Omega^{(3)}_{,2}x^1_{(3)} + \Omega^{(4)}_{,2}x^1_{(4)})e_1 + (\Omega^{(1)}_{,2}x^2_{(1)} + \Omega^{(2)}_{,2}x^2_{(2)} + \Omega^{(3)}_{,2}x^2_{(3)} + \Omega^{(4)}_{,2}x^2_{(4)})e_2 \quad (6-16)$$

و من هذه العلاقات التفصيلية يمكن استنتاج مركبات أشعة القاعدة الأساسية المثلة بشكل مختصر في العلاقة (6.14). إذاً يمكن أن نحسب في كل نقطة من شبة المنحرف عدد برؤوسه الأربعة في الإحداثيات الديكارتية أشعة القاعدة الأساسية إذا ما أعطيت بالإضافة إلى الإحداثيات الديكارتية للرؤوس الأربعة الإحداثيات الطبيعية لهذه النقطة . و هذه الأشعة تتغير في الحالة العامة شدداً و اتجاهاتها من نقطة إلى أخرى و بالتالي أصبح لدينا في كل نقطة جملة أشعة قاعدة أساسية بمقدورها تعيينها و لذلك نستطيع أن ننسب قيم التأثيرات الإنشائية في النقطة نفسها إلى تلك الجملة بشكل مماثل لنسبها إلى جملة الأشعة الواحدة الديكارتية مع الفارق أن أطوال الأشعة القاعدية الأساسية غير واحدة ، و أن اتجاهاتها متغيرة من نقطة إلى أخرى .

#### 6-1-4. المعاملات المترية الأساسية

تسمى الجداءات السلمية لأشعة القاعدة الأساسية ببعضها البعض بالمعاملات المترية الأساسية و يرمز لها بالرمز  $g_{\alpha\beta}$  و يعبر عنها بالشكل :

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha}g_{\beta} = g^i_{\alpha}e_i g^j_{\beta}e_j = g^i_{\alpha}g^j_{\beta}\delta_{ij} \quad (6.17)$$

حيث  $\delta$  كرونكر دلتا المعروف في الفصل الأول . و باعتبار أن الجداء السلمي عملية تبديلية فالمصفوفة الممثلة للمعاملات المترية الأساسية مصفوفة متناظرة و سنرى أنه بواسطة المعاملات المترية الأساسية سيتم خفض قرينة متحولة على الإحداثيات الطبيعية كما هو الحال في استخلام موترية كرونكر  $\delta_{ij}$  لخفض قرينة تتحول على الإحداثيات الديكارتية.

## 6-1-5. العنصر المساحي

يسمى جذر قيمة معين مصغوفة المعاملات المترية الأساسية بالعنصر المساحي و يرمز له  $\sqrt{g}$  حيث :

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \quad (6.18)$$

و تسمية جذر هذه القيمة بالعنصر المساحي عائد إلى الخواص الهندسية لهذه القيمة. فلنفترض أن  $\alpha$  هي الزاوية بين شعاعي القاعدة الأساسية فمربع مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين هي :

$$\begin{aligned} A^2 &= |g_1|^2 |g_2|^2 \sin^2 \alpha \\ A^2 &= |g_1|^2 |g_2|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ A^2 &= |g_1|^2 |g_2|^2 - |g_1|^2 |g_2|^2 \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (6.19)$$

و هذه القيمة مكافئة تماماً للقيمة  $g$  الواردة في العلاقة (6.18) و الجذر التربيعي للقيمة  $g$  مسلو للمساحة المنشأة على شعاعي القاعدة الأساسية .

## 6-1-6 . المعاملات المترية الضدية

المعاملات المترية الضدية هي مقلوب المعاملات المترية الأساسية و يرمز لها  $g^{\alpha\beta}$  حيث تكسب قرائنها في الأعلى . و بالتالي فجاء المعاملات المترية الضدية في المعاملات المترية الأساسية يسوي إلى موتره كرونيكر .

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \quad (6.20)$$

و بواسطة المعاملات المترية الضدية سيتم رفع قرينة متحولة على الإحداثيات الطبيعية كما هو الحال في استخدام موتره كرونيكر  $\delta^{\alpha\beta}$  لرفع قرينة متحولة على الإحداثيات الديكارتية .

## 6-1-7- . أشعة القاعدة الضدية

يرمز لأشعة القاعدة الضدية بالرمز  $g^a$  و قرينتها تكتب في الأعلى و تعرف بأنها تلك الأشعة التي ترتبط مع أشعة القاعدة الأساسية بالعلاقة:

$$g^a g_\gamma = \delta^a_\gamma \quad (6.21)$$

في حالتنا المدروسة هذه لدينا جملة قاعدة ضدية مولفة من شعاعين وضعهما بالنسبة لأشعة القاعدة الأساسية ينتج مباشرة من التعريف (6.21) إذ أن مفكوك هذه العلاقة هو :

$$\begin{aligned} g^1 g_1 &= 1 \\ g^2 g_1 &= 0 \\ g^1 g_2 &= 0 \\ g^2 g_2 &= 1 \end{aligned} \quad (6.22)$$

و بالتالي فالشعاع  $g^1$  عمودي على الشعاع  $g_2$  و الشعاع  $g^2$  عمودي على الشعاع  $g_1$  و هما يمثلان إلى جانب أشعة القاعدة الأساسية في الشكل 6-3. هذان الشعاعان يشكلان أيضاً جملة يمكن تعيينها لأي نقطة بدلالة الإحداثيات الطبيعية لهذه النقطة و الإحداثيات الديكارتية لرؤوس شبة المنحرف . إذ يتضح من مقارنة العلاقتين (6.20) و (6.21) و بمراعاة العلاقة (6.17) أن :

$$g^a g_\gamma = g^{ap} g_{p\gamma} = g^{ap} g_p g_\gamma \quad (6.23)$$

و من هذه العلاقة ينتج :

$$g^a = g^{ap} g_p \quad (6.24)$$

إذا أمعن المرء النظر في هذه العلاقة فسوف يجد أن القرينة  $\beta$  قد رفعت إلى الأعلى و استبدلت بقرينة أخرى  $\alpha$  . و مركبات أشعة القاعدة الضدية  $g_i^a$  على المحاور الإحداثية الديكارتية يمكن استنتاجها مباشرة من العلاقة الشعاعية السابقة إذ أن هذه العلاقة الشعاعية مكافئة بعد نسبها إلى الإحداثيات الديكارتية للعلاقة :

$$g_i^a e^i = g^{ap} g_p e_i \quad (6.25)$$

وللحصول على المركبات فرادى نضرب هذه العلاقة ب  $e_j$  فنحصل على :

$$g_i^\alpha e_j^\beta = g_i^\alpha \delta_j^\beta = g_j^\alpha = g^{\alpha\beta} g_i^\beta e_j^\beta = g^{\alpha\beta} g_i^\beta \delta_j^\beta \quad (6.26)$$

و منشور هذه العلاقة يحتوي على أربعة معادلات لحساب المركبات اللتين لكل شعاع من أشعة القاعدة الضدية وذلك باعتبار القرائن  $\alpha, \beta$  قرائن مستقلة. والجداعات السلمية لأشعة القاعدة الضدية ببعضها البعض يمثل للمعاملات المترية فاستنادا إلى العلاقة (24 . 6) و بملاحظة العلاقتين (17 . 6) و (20 . 6) يمكن أن نكتب :

$$g^\alpha \cdot g^\beta = g^{\alpha\gamma} g_\gamma g^{\beta\eta} g_\eta = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\eta} g_{\gamma\eta} \quad (6.27)$$

$$g^\alpha \cdot g^\beta = g^{\alpha\gamma} \delta_\gamma^\beta = g^{\alpha\beta}$$

و يبرهن أيضاً أن:

$$g_\alpha = g_{\alpha\beta} g^\beta \quad (6.28)$$

وذلك بالبدء بالبرهان من الطرف الثاني. باستبدال للمعاملات المترية الأساسية  $g_{\alpha\beta}$  بالجداعات السلمية لأشعة القاعدة  $g_\alpha \cdot g_\beta$  و من ثم ملاحظة أن الجداء  $g_\alpha g_\beta$  هو متوتر كرونيكر  $\delta_\alpha^\beta$  ، الذي نستطيع بواسطته استبدال قرينة الأشعة  $g_\beta$  بالقرينة  $\alpha$  حيث نحصل بعد هذا على النتيجة  $\cdot g_\alpha$

## 6-1-7- مشتقات أشعة القاعدة الأساسية

يمكن اشتقاق أشعة القاعدة الأساسية بالنسبة للإحداثيات الطبيعية فنحصل باعتبار العلاقة (6.13) على المشتقات التالية:

$$g_{\alpha,\beta} = \Omega_\alpha^{(k)} \cdot g_{\alpha\beta} X^i(k) e_i \quad (6.13)$$

و مركبات هذه للمشتقات هي :

$$g_{\alpha,\beta}^i = \Omega_\alpha^{(k)} \cdot g_{\alpha\beta} X^i(k) \quad (6.30)$$

وبعد ملاحظة مشتقات توابع الشكل (6.15) ينتج :

$$g_{1,1} = 0$$

$$g_{2,2} = 0$$



$$\mathbf{g}_{1,2} = (\Omega^{(1)}_{,12} \mathbf{x}^1_{(1)} + \Omega^{(2)}_{,12} \mathbf{x}^1_{(2)} + \Omega^{(3)}_{,12} \mathbf{x}^1_{(3)} + \Omega^{(4)}_{,12} \mathbf{x}^1_{(4)}) \mathbf{e}_1 \\ + (\Omega^{(1)}_{,12} \mathbf{x}^2_{(1)} + \Omega^{(2)}_{,12} \mathbf{x}^2_{(2)} + \Omega^{(3)}_{,12} \mathbf{x}^2_{(3)} + \Omega^{(4)}_{,12} \mathbf{x}^2_{(4)}) \mathbf{e}_2 \quad (6.31)$$

حيث:

$$\Omega^{(1)}_{,12} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \Omega^{(2)}_{,12} = -\frac{1}{4}; \\ \Omega^{(3)}_{,12} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \Omega^{(4)}_{,12} = -\frac{1}{4}; \quad (6.32)$$

و الشعاع الأخير مكافئ للشعاع  $\mathbf{g}_{2,1}$  و يلاحظ أن الشعاع الأخير ثابت لحالة استخدام توابيع الشكل المفترضة في العلاقة (6.5) فهو غير متعلق بالإحداثيات الطبيعي  $\theta^1$  أو  $\theta^2$  ويتعلق فقط بإحداثيات رؤوس شبه المنحرف.

#### 6-1-8- تحويل الانتقالات بين الإحداثيات الديكارتية و الطبيعية

ليكن  $\mathbf{u}$  شعاع الانتقالات لنقطة ما لا على التبيين من شبه المنحرف. هذا الشعاع يمكن نسبه إلى جملة الأشعة الواحدة في الإحداثيات الديكارتية , أو إلى أشعة القاعدة الأساسية في النقطة نفسها أو إلى أشعة القاعدة الضدية. وبما أن الأمر متعلق بنفس الشعاع فيجب أن يكون :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}^1 = u^1 \mathbf{e}_1 = u^\alpha g_\alpha = u_\alpha g^\alpha \quad (6.33)$$

حيث  $u_\alpha, u^\alpha$  هي المركبات الضدية و الأساسية على التوالي لشعاع الانتقالات. لنحاول الآن الحصول على المركبات  $u_1$  من المركبات  $u_\alpha$  لشعاع الانتقالات . لنأخذ العلاقة :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}^1 = u_\alpha g_1^\alpha \mathbf{e}^1 \quad (6.34)$$

لنعرض فيها أشعة القاعدة الضدية مصاغة بدلالة الأشعة الواحدة الديكارتية علاقة (6.25) فنجد أن :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}^1 = u_\alpha g_1^\alpha \mathbf{e}^1 \quad (6.35)$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$u_1 = u_\alpha g_1^\alpha \quad (6.36)$$

أي أن التحويل يتم بواسطة أشعة القاعدة الضدية. لنحاول الآن الحصول على المركبات  $u_\alpha$  من المركبات  $u_i$  لهذا الغرض نضرب العلاقة (6.34) بأشعة القاعدة الأساسية :

$$u_i e^i g_\beta = u_i e^i g^j_\beta e_j = u_i g^j_\beta \delta^i_j = u_j g^j_\beta = u_\alpha g^\alpha g_\beta = u_\alpha \delta^\alpha_\beta = u_\beta \quad (6.37)$$

و بالتالي لدينا التحويل :

$$u_\beta = g^j_\beta u_j; u_\alpha = g^i_\alpha u_i \quad (6.38)$$

أي أن التحويل يتم بمساعدة مركبات أشعة القاعدة الأساسية. و يمكن بنفس الطرق السابقة برهان التحويلات التالية :

$$u^i = g^i_\alpha u^\alpha \quad (6.39)$$

$$u^\alpha = g^i_\alpha u^i \quad (6.40)$$

وبالتالي نجد أنه ببساطة يمكن الانتقال من المركبات الديكارية إلى المركبات الطبيعية وبالعكس بفضل تعريف جمل الأشعة هذه . ولاحظ أن القاعدة المشتركة لهذه التحويلات تلخص في حذف القرينة التي يتم عليها الجمع. يمكن أيضا انطلاقا من العلاقة (6.33) أن نبرهن العلاقات التالية:

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta \quad (6.41)$$

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta \quad (6.42)$$

أي أننا نستطيع بواسطة المعاملات المترية الأساسية و الضدية التحويل بين المركبات الأساسية و الضدية لشعاع الانتقالات . و يلاحظ أنه بواسطة هذه المعاملات يتم رفع أو خفض قرينة كما ذكر سابقا .

## 6-1-9- المشتق الأساسي

### 6-1-9-1- المشتق الأساسي لقيمة سلمية

لنفترض أن  $I$  قيمة سلمية تابعة للإحداثيات الديكارية المستقلة  $(x^i)$ . لنشتق هذه القيمة السلمية بالنسبة للإحداثيات الطبيعية باستخدام قاعدة مشتق تابع التابع فنجد أن :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial I}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^\alpha} \quad (6.43)$$

و مشتق الإحداثيات الديكارتية بالنسبة للإحداثيات الطبيعية هو:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \theta^\alpha} = \Omega_{\alpha}^{(k)}{}_{,i} x^i(k) = g^i_{\alpha} \quad (6.44)$$

فان لنلك العلاقة (6.4) بالعلاقة (6.14) و. بالتالي فمشتق القيمة السلمية يأخذ الشكل

$$I_{,\alpha} = g^i_{\alpha} I_{,i} \quad (6.44)$$

## 6-1-9-2 - المشتق الأساسي لمركبات شعاع

ليكن لدينا المركبات  $u_{\alpha}$  لشعاع انتقالات ما . وجدنا أن العلاقة التي تربط هذه المركبات بمركبات شعاع الانتقالات  $u_i$  على المحاور الإحداثية الديكارتية هي من الشكل :

$$u_{\alpha} = g^i_{\alpha} u_i \quad (6.46)$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة للإحداثيات الطبيعية فنحصل على :

$$\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \theta^{\beta}} = \frac{\partial g^i_{\alpha}}{\partial \theta^{\beta}} u_i + g^i_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \theta^{\beta}} \quad (6.47)$$

و باستخدام العلاقة (6.44) و ملاحظة (6.30) يمكن صياغة هذه العلاقة بالشكل :

$$u_{\alpha\beta} = g^i_{\alpha} g^j_{\beta} u_{i,j} + g^i_{\alpha} g^k_{\beta} u_{i,k} \quad (6.48)$$

نعرف الآن المشتق الأساسي للمركبات  $u_{\alpha}$  بالنسبة للإحداثيات الطبيعية و نرمز له بالشكل :

$$u_{\alpha\beta} = g^i_{\alpha} g^j_{\beta} u_{i,j} \quad (6.49)$$

فنحصل بعد إدخال هذا التعريف إلى العلاقة (6.48) و نقل الحد الأول من الطرف الثاني إلى الطرف الأول على :

$$u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} - g^i_{\alpha} g^j_{\beta} u_{i,j} \quad (6.50)$$

نحول المركبات الديكارتية للانتقالات الموجودة في الحد الثاني من الطرف الثاني للعلاقة السابقة إلى المركبات الطبيعية باستخدام علاقة التحويل (6.36) فنحصل على :

$$u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} - g^i_{\alpha} g^j_{\beta} u_{i,j} \quad (6.51)$$

و هكذا نجد أن المشتق الأساسي يحوي بالإضافة إلى المشتق العادي بالنسبة للإحداثيات الطبيعية  $u_{\alpha\beta}$  على المركبات الطبيعية لشعاع الانتقالات  $u_p$  مضروبة بجداء مركبات أشعة القاعدة الضدية و مشتقات مركبات أشعة القاعدة الأساسية و التي تسمى عادة في المصادر العلمية بـرموز كرسستوفل (CHRISTOFFEL) :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = g^{\gamma\delta} g_{\delta\alpha} g_{\beta\gamma} \quad (6.52)$$

يملك المشتق الأساسي لمركبات شعاع العلاقة (6 . 49) . علائقاً للمشتقات الجزئية له (6 . 48) خواص الموترية نظراً لخاصية تحويل القرائن الواردة في العلاقة (6 . 49) . أما في حالة المشتقات الجزئية . فالحد الأول من الطرف الثاني للعلاقة (6 . 48) يمثل حد غير مرغوب فيه يؤدي إلى محرق قواعد تحويل الموترات و التي سيتم التعرف عليها في الفقرة اللاحقة . بالإضافة إلى المشتق الأساسي للمركبات الأساسية يمكننا أن نعرف المشتق الأساسي للمركبات الضدية  $u^{\alpha\beta}$  و المشتق الضدي للمركبات الضدية  $u^{\alpha\beta}$  .

#### 6-1-10- تعريف الجداء الموترى والموترة

#### 6-1-10-1 تعريف الجداء الموترى

لتكن  $b_a$  مجموعتان مرتبتان من الأعداد على الشكل:

$$\begin{aligned} a_i &= (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m) \\ b_j &= (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n) \end{aligned} \quad (6.53)$$

حيث  $i$  قرينة تتحول من 1 إلى  $m$  و  $j$  قرينة تتحول من 1 إلى  $n$  . يعرف الجداء الموترى بأنه ذلك الجداء الذي يتم فيه ضرب كل عدد من المجموعة الأولى بكل عدد من المجموعة الثانية ويرمز لهذا الجداء بالشكل :

$$c_{ij} = a_i \otimes b_j \quad (6.54)$$

وعناصر المجموعة  $c_{ij}$  تمثل مجموعة مرتبة من الأعداد حيث تتحول فيها القرينة  $i$  من 1 إلى  $m$  والقرينة  $j$  من 1 إلى  $n$  . و نتيجة الضرب مفصلة هي :

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

عملية الجداء هذه غير تبديلية بشكل عام ، إذ أن ترتيب عناصر مجموعة مرتبة من الأعداد يلعب دوراً أيضاً في تمييز هذه المجموعة عن غيرها .

يلاحظ أنه لو كانت المجموعتان  $b_j, a_i$  تحتويان على نفس العدد من المركبات و السبي يمكن اعتبارها مركبات في الفراغ البعدي  $n$  فإن مجموع عناصر القطر الرئيسي لحاصل الجداء المتوسري يمثل الجداء السلمي للذين الشعاعين . و يمكن تعميم هذا الجداء ليشمل جداء أي مجموعات مرتبة من الأعداد ، فلو تحولت قرائن المجموعة الأولى على بعدين  $a_{ij}$  و قرائن المجموعة الثانية على ثلاثة أبعاد مثلاً  $b_{ikm}$  كان الجداء للمتوسري لهاتين المجموعتين :

$$c_{ikm} = a_{ij} \otimes b_{ikm} \quad (6.56)$$

حيث يتحول هذا الجداء على خمسة أبعاد . يمكن الاستنتاج أيضاً أن ضرب مصفوفتين ليس إلا حالة خاصة من الجداء للمتوسري المعروف هنا .

## 6-10-2- تعريف المتوترة

المتوترة هي تعبير رياضي يحتوي على مجموعة مرتبة من المركبات تحددها قرائن منحولة و يرتبط بكل قرينة مجموعة قاعدية تنسب إليها هذه المركبات (مثلاً أشعة القاعدة الأساسية أو غيرها) . و تخضع مركباتها لمتساوئ التحويل نفسها التي تخضع لها المجموعة القاعدية المرتبطة بها . كمثال على هذا التعبير الرياضي يمكن أن نعطي التعبير الرياضي التالي:

$$t = t^{\alpha\beta} g_{\alpha} \otimes g_{\beta} \quad (6.57)$$

$t^{\alpha\beta}$  تمثل مركبات المتوترة  $t$  التي تتحول في بعدين  $g_{\alpha} \otimes g_{\beta}$  مجموعته القاعدية . ولكي يمثل التعبير السابق متوترة يجب أن تتحول مركباتها بنفس التحويلات التي تتحول بها مجموعتها القاعدية . فلو عرفنا عن هذه المتوترة في الإحداثيات الديكارتية بالشكل :

$$t = t^{ik} e_i \otimes e_k \quad (6.58)$$

حيث  $t^{ik}$  مركبات الموتر في الإحداثيات الديكارتية ،  $e_i \otimes e_k$  قاعدة المترية المرتبطة بما فيجب أن يكون:

$$t^{ik} e_i \otimes e_k = t^{\alpha\beta} g_{\alpha}^i \otimes g_{\beta}^k = t^{\alpha\beta} g_{\alpha}^i e_i \otimes g_{\beta}^k e_k \quad (6.59)$$

وكل قرينة من قرائنها يتم تحويلها بالشكل نفسه التي يتم به تحويل شعاع القاعدة المرتبط بها، فمن العلاقة السابقة ينتج أن :

$$t^{ik} = g_{\alpha}^i g_{\beta}^k t^{\alpha\beta} \quad (6.60)$$

وبالعكس أيضاً يمكن الحصول على  $t^{\alpha\beta}$  من  $t^{ik}$  بالشكل :

$$t^{\alpha\beta} = g_i^{\alpha} g_k^{\beta} t^{ik} \quad (6.61)$$

وبما أن قرائن مركبات الموتر في (6.57) تتحول في بعدين فنقول أنه لدينا موتر من المرتبة الثانية و كمثال على موتر من المرتبة الأولى يمكن أن نذكر شعاع الانتقالات و الذي نسب في العلاقة (6.33) إلى جمل إحداثية مختلفة . ووجدنا أنه يخضع لقوانين التحويل المذكورة في العلاقات (6.36)، (6.38)، (6.39)، (6.42)، (6.41)، (6.40). وهذه التحويلات مكافئة تماماً لتحويل أشعة القاعدة التي عبر عن الانتقالات بدلالاتها (انظر التعبير عن أشعة القاعدة الأساسية و الضدية بدلالة الأشعة الإحداثية الديكارتية و التحويلات بين أشعة القاعدة الأساسية و الضدية في العلاقات (6.24)، (6.28). و كمثال على موتر من المرتبة الصفرية يمكن أن نذكر الجداء السلمي لشعاعين و الجداء المختلط لثلاثة أشعة و تكون في هذه الحالة عدد مركبات الموتر مركبة واحدة فقط و كعميم يمكن أن تعرف الموتر من المرتبة  $n$  بالشكل:

$$t = t^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} g_{\alpha_1}^i \otimes g_{\alpha_2}^j \otimes g_{\alpha_3}^k \otimes g_{\alpha_4}^l \dots \quad (6.62)$$

حيث تحوي مركبات الموتر على  $n$  قرينة و أشعة القاعدة له تحوي على  $n$  شعاع . يلاحظ أن لكل قرينة من قرائن الموتر (مثلاً  $\alpha$ ) شعاع مرتبط بها (مثلاً  $g_{\alpha}^i$ ) و يتم تحوير كل قرينة بالطريقة نفسها التي يتم تحويل الشعاع المرتبط بها . و عليه يتم تحويل مركبات الموتر على المحاور الإحداثية الطبيعية  $t^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$  إلى المحاور الإحداثية الديكارتية .... بالشكل:

$$t^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = g_{\alpha_1}^i g_{\alpha_2}^j g_{\alpha_3}^k g_{\alpha_4}^l \dots t^{ijkl \dots} \quad (6.63)$$

أو بالعكس :

$$t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = g_i^\alpha g_j^\beta g_k^\gamma g_l^\delta \dots t_{ijkl\dots} \quad (6.64)$$

في حالة تعريف الموتره بقرائن منخفضة يتم التحويل كما يلي :

$$t_{ijkl\dots} = g_i^\alpha g_j^\beta g_k^\gamma g_l^\delta \dots t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots} \quad (6.65)$$

أو بالعكس :

$$t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = g_i^\alpha g_j^\beta g_k^\gamma g_l^\delta \dots t_{ijkl\dots} \quad (6.66)$$

و عند تعريف موتره بمركبات مختلطة قاعدية أساسية و قاعدية ضدية كالموتره  $t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots}$  يتم التحويل كما يلي :

$$t_{ijkl\dots} = g_i^\alpha g_j^\beta g_k^\gamma g_l^\delta \dots t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots} \quad (6.67)$$

$$t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = g_i^\alpha g_j^\beta g_k^\gamma g_l^\delta \dots t_{ijkl\dots} \quad (6.68)$$

و يتم تحويل موتره بمركباتها القاعدية الأساسية إلى موتره بمركبات قاعدية ضدية بنفس طريقة تحويل الأشعة القاعدية الضدية و ذلك لكل قرينة من قرائن الموتره و كمثال على ذلك لدينا التحويلات :

$$t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = g_i^\alpha g_j^\beta g_k^\gamma g_l^\delta \dots t_{ijkl\dots} \quad (6.69)$$

أو بالعكس:

$$t_{ijkl\dots} = g_i^\alpha g_j^\beta g_k^\gamma g_l^\delta \dots t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots} \quad (6.70)$$

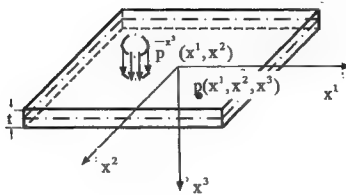
في حالة وجود مركبات مختلطة يتم التحويل بالشكل :

$$t^{\alpha\beta\gamma\delta\dots} = g_i^\alpha g_j^\beta g_k^\gamma g_l^\delta \dots t_{ijkl\dots} \quad (6.71)$$

و هذه هي الخواص الأساسية التي تحدد ماهية الموتره . و على هذا الأساس يكون من السهل الانتقال بين الإحداثيات المختلفة أثناء التعامل مع مسائل نظرية المرونة إذا علمنا أن التشوهات و الإجهادات و معاملات المرونة للمادة تمثل موترات يحدد مرتبتها بعد المسألة المطروحة (مسألة أحادية البعد، ثنائية البعد، ثلاثية الأبعاد). و بالتالي يمكن معالجة طولوجيات معقدة للعضات باستخدام الإحداثيات الطبيعية ، و بعد الحصول على قيم التأثير في الإحداثيات الطبيعية نستطيع ببساطة الحصول على مكافئاتها في الإحداثيات الديكارتية باستخدام دساتير تحويل مركبات الموترات .

## 6-2- نظرية المرونة في الإحداثيات الديكارتية

### 6-2-1- مجاهيل نظرية المرونة

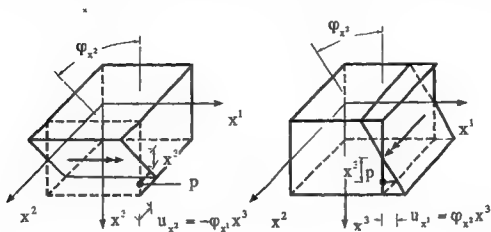


شكل 5-6 : بلاطة رقيقة ، المحاور الإحداثية ، الحمل ، المستوى الوسطي

نبدأ أولاً بتحديد المجاهيل التي تعين الحالة الانتقالية لبلاطة رقيقة شكل (5-6) بناءً على الفرضيات الواردة في مقدمة هذا الفصل. لهذا الغرض يجب تحديد الانتقالات  $u_{x^1}, u_{x^2}, u_{x^3}$  لنقطة ما لا على التعيين  $p(x^1, x^2, x^3)$  واقعة في الربع الأول (الموجب) من المحاور الإحداثية الديكارتية التي نسبت إليها البلاطة. حسب الفرضية الثانية لا يتعرض السطح الوسطي للبلاطة لأي تشوهات وبالتالي يجب أن تكون انتقالات السطح الوسطي المحايد في الاتجاه  $x^1, x^2$  معدومة أي أن  $u_{x^1}^0, u_{x^2}^0$  لنقطة ما لا على التعيين من السطح الوسطي للبلاطة معدومة. ويبقى فقط الانتقال  $u_{x^3}$  الذي يحدد الشكل المتشوه للسطح الوسطي. نصيغ انتقالات النقطة  $p$  بدلالة انتقالات نقطة تقاطع العمود النازل من هذه النقطة على السطح الوسطي ودورانات المقاطع حول المحاور الإحداثية والتي تنحصر الآن في دورتين هما دوران المقطع  $\varphi_x$  حول  $x^1$  ودوران المقطع



$\varphi_{x^2}$  حول  $x^2$  أما دوران المقاطع  $\varphi_{x^3}$  حول  $x^3$  فهو معلوم انسجماً مع الفرضية الثانية استناداً إلى ما سبق وإلى الشكل (6-6) نستطيع أن نكتب:



(a)

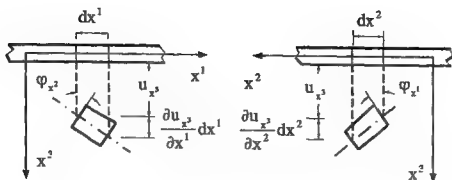
(b)

شكل 6-6 : دورانات المقاطع ، (a) الدوران  $\varphi_{x^1}$  حول  $x^1$  ، (b) الدوران  $\varphi_{x^2}$  حول  $x^2$

$$\begin{aligned} u_{x^1} &= \varphi_{x^2} x^3 \\ u_{x^2} &= -\varphi_{x^1} x^3 \\ u_{x^3} &= u_{x^3}^0 \end{aligned} \quad (6-72)$$

وفقاً لفرضيات كيرشوف - لوف يمكن التعبير عن دورانات المقاطع  $\varphi_{x^1}, \varphi_{x^2}$  بدلالة الانتقال  $u_{x^3}^0$ ، وهذه الفرضيات شبيهة بتلك التي استخدمت في نظرية الجوائز باعتبار مشتقات الانتقالات صغيرة. واستناداً إلى الشكل (7-6) يكون :

$$\begin{aligned} \varphi_{x^1} &= \frac{\partial u_{x^3}^0}{\partial x^2} \\ \varphi_{x^2} &= -\frac{\partial u_{x^3}^0}{\partial x^1} \end{aligned} \quad (6.73)$$



(a) دوران سالب  $\varphi_{x2}$  حول  $x^2$

(b) دوران موجب  $\varphi_{x1}$  حول  $x^1$

شكل 7-6 : فرضيات كيرشوف - لوف

والإشارة السالبة تعني أن انتقالاً موجباً للنقطة  $p$  يؤدي إلى زاوية دوران  $\varphi_{x2}$  سالبة وهذه مسا يمكن ملاحظته مباشرة من الشكل 6-7-6. بتعويض (6-73) في (6-72) نحصل على :

$$\begin{aligned} u_{x1} &= -x^3 \frac{\partial u_{x3}^0}{\partial x^1} \\ u_{x2} &= -x^3 \frac{\partial u_{x3}^0}{\partial x^2} \\ u_{x3} &= u_{x3}^0 \end{aligned} \quad (6.74)$$

وهذا يعني أن باستطاعتنا تحديد الحالة الانتقالية للبلاطة تحديداً تاماً بتعيين تابع الانتقال  $u_{x3}^0$  للمستوى الوسطي والمعادلة التي تمثل هذا التابع هي معادلة سطح وبالتالي يتعلق هذا التابع بالإحداثيين  $x^1, x^2$ . بناءً على الحالة الانتقالية هذه يجب أن تنعدم التشوهات العرضية  $\epsilon_{x1x2}$  و  $\epsilon_{x2x3}$ . إذا ينتج باستخدام علاقات التشوهات -الانتقالات ومراعاة العلاقات (6-74) أن:

$$\varepsilon_{x^1x^3} = \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^3} + \frac{\partial u_{x^3}}{\partial x^1} = -\frac{\partial u_{x^3}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial u_{x^1}^0}{\partial x^3} = 0 \quad (6.75)$$

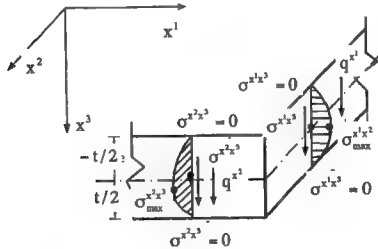
$$\varepsilon_{x^2x^3} = \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^3} + \frac{\partial u_{x^3}}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_{x^3}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{x^2}^0}{\partial x^3} = 0$$

يمكن أيضا إهمال التشوه الناطقي  $\varepsilon_{x^3x^3}$  الحاصل في اتجاه  $x^3$  ونقتصر موزة التشوهات التي يجب تعيينها على :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} & \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^1} & \varepsilon_{x^2x^2} \end{pmatrix} \quad (6-76)$$

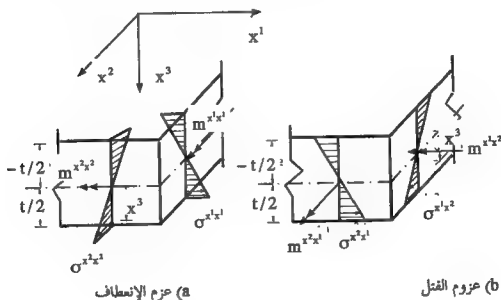
جزء موزة الإجهادات المرتبطة مع حالة التشوهات السابقة هي :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{x^1x^1} & \sigma_{x^1x^2} \\ \sigma_{x^2x^1} & \sigma_{x^2x^2} \end{pmatrix} \quad (6-77)$$



شكل 6-8 : توزيع الإجهادات القصية

يجب الإجهاد  $\sigma^{x^3x^3}$  بمكاملة معادلة توازن القوى في اتجاه  $x^3$  على عنصر تفاضلي كما سنرى لاحقاً . أما وجود الإجهادين  $\sigma^{x^1x^3}$ ,  $\sigma^{x^2x^3}$  فهو ضروري لموازنة الحملنة  $\bar{p}(x^1, x^2)$  , و بالطبع هذا يمثل تناقضاً واضحاً في نظرية البلاطات الرقيقة فمن جهة نفترض التشوهات القاصة مهملة وفق العلاقة (6.75) و من جهة أخرى تعتبر الإجهادات القاصة الموافقة للتشوهات القاصة هذه موجودة وتلعب دوراً أساسياً في توازن البلاطة وهذا يؤدي إلى عدم التوافق التام بين حالة التشوهات و الحالة الإجهادية مما يؤدي بدوره إلى صعوبة صياغة الشروط الطرفية . وحسب نظرية السطوح الحرة للإجهادات يفترض أن يكون الإجهادين  $\sigma^{x^1x^3}$ ,  $\sigma^{x^2x^3}$  معلومين على السطوح الحرة للبلاطة أي على السطحين  $x^3 = \pm \frac{t}{2}$  و تصل قيمة هذه الإجهادات إلى قيمتها الاعظمية على السطح الوسطي للبلاطة (شكل 6-8) . يجري عادة تجميع الإجهادات على سطوح المقاطع إلى قوى مقطع في واحدة الطول . وتكون وحدات قوى المقطع في البلاطة واحدة قوة مقسومة على واحدة طول. وهذه القوى هي عزوم الإنعطاف المثلثة باتجاهاتها الموجبة في الشكل (6-9-8) ومقاديرها لواحدة الطول:



شكل 6-9 : عزوم المقطع للبلاطة

$$m^{x^1x^1} = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^1x^1} x^3 dx^3 \quad (6.78)$$

$$m^{x^2x^2} = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^2x^2} x^3 dx^3 \quad (6.79)$$

وعزوم الفتل الممثلة باتجاهاتها الموجبة في الشكل 6-9-b ومقاديرها لواحدة الطول :

$$m^{x^1x^2} = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^1x^2} x^3 dx^3 \quad (6.80)$$

$$m^{x^2x^1} = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^2x^1} x^3 dx^3 \quad (6.81)$$

والقوى القاصية الممثلة باتجاهاتها الموجبة في الشكل 6-8 ومقاديرها لواحدة الطول

$$q^{x^1} = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^1x^3} dx^3 \quad (6.82)$$

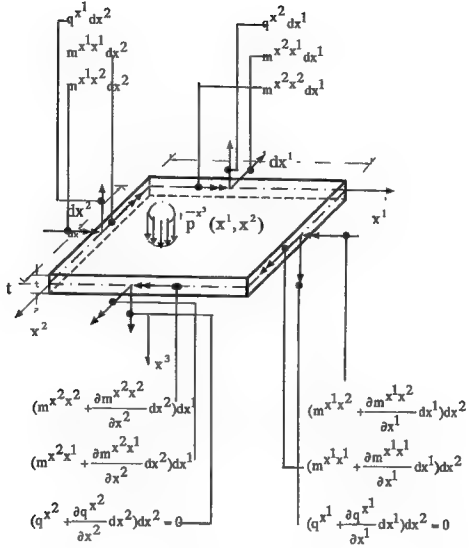
$$q^{x^2} = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma^{x^2x^3} dx^3 \quad (6.83)$$

يلاحظ أن قرائن قوى المقطع لا تدل على اتجاه قوة المقطع بالنسبة للمحاور الإحداثية وإنما تسدل على الإجهاد الموافق لها .

6 - 2 - 2 - معادلات نظرية المرونة

6 - 2 - 2 - 1 معادلات التوازن

لنقتطع من بلاطة عنصرا بأبعاد تفاضلية  $dx^1 dx^2$  و لنمثل عليه محصلات قوى المقطع الشكل (10-6) على الضفة السالبة للمقطع (الضفة السالبة للمقطع هي تلك التي يخترقها المحور الإحداثي داخلا إليها) . و تغيرات قوى المقطع على الضفة الموجبة للمقطع (الضفة الموجبة للمقطع هي تلك



شكل 6-10 : عنصر تفاضلي من بلاطة ، المحاور الإحداثية ، قوى المقطع ، الحمل

التي يخرقها المحور الإحداثي عارِجاً منها). و لنعتبر أن التغير الحاصل في قوى المقطع مكافئ للمحدود الأولى الخطية من منشور تواضع قوى المقطع وفق سلسلة تايلور . نكتب معادلات التوازن للعنصر و هي معادلة إسقاط في اتجاه المحور  $x^3$  . و معادلتين عزوم حول محورين مارين بمركز ثقل العنصر و موازيين للمحورين  $x^1, x^2$  على التوالي فنحصل على :

$$\begin{aligned}
& (q^{x^1} + \frac{\partial q^{x^1}}{\partial x^1} dx^1) dx^2 + (q^{x^2} + \frac{\partial q^{x^2}}{\partial x^2} dx^2) dx^1 - \\
& q^{x^1} dx^2 - q^{x^2} dx^1 + \bar{p}^{-3}(x^1, x^2) dx^1 dx^2 = 0 \\
& m^{x^1 x^2} dx^2 + m^{x^2 x^2} dx^1 - (m^{x^2 x^2} + \frac{\partial m^{x^2 x^2}}{\partial x^2} dx^2) dx^1 - (m^{x^1 x^2} + \frac{\partial m^{x^1 x^2}}{\partial x^1} dx^1) dx^2 + \\
& q^{x^2} dx^1 \frac{dx^2}{2} + (q^{x^2} + \frac{\partial q^{x^2}}{\partial x^2} dx^2) dx^1 \frac{dx^2}{2} = 0 \\
& -m^{x^1 x^1} dx^2 + (m^{x^1 x^2} + \frac{\partial m^{x^2 x^1}}{\partial x^2} dx^2) dx^1 - m^{x^2 x^1} dx^1 + (m^{x^1 x^1} + \frac{\partial m^{x^1 x^1}}{\partial x^1} dx^1) dx^2 - \\
& q^{x^1} dx^2 \frac{dx^1}{2} - (q^{x^1} + \frac{\partial q^{x^1}}{\partial x^1} dx^1) dx^2 \frac{dx^1}{2} = 0
\end{aligned}
\tag{6.84}$$

و باختصار الحدود المتشابهة و إهمال حدود للراتب العليا و إدخال الاختصارات:  $\frac{\partial()}{\partial x^1} = ()_{,x^1}$

$$\text{ينتج أن: } \frac{\partial()}{\partial x^2} = ()_{,x^2}$$

$$\begin{aligned}
& q^{x^1}_{,x^1} + q^{x^2}_{,x^2} + \bar{p}^{-3}(x^1, x^2) = 0 \\
& m^{x^1 x^2}_{,x^1} + m^{x^2 x^2}_{,x^2} - q^{x^2} = 0 \\
& m^{x^1 x^1}_{,x^1} + m^{x^2 x^1}_{,x^2} - q^{x^1} = 0
\end{aligned}
\tag{6.85}$$

و تصاغ هذه المعادلات باستخدام القرائن بالشكل

$$\begin{aligned}
& q^{i,j} + \bar{p}^{-3} = 0 \\
& m^{ij}_{,j} - q^i = 0
\end{aligned}
\tag{6.86}$$

يمكن حذف المعادلتين الثانية والثالثة من معادلات التوازن (6.85) والحصول على معادلة وحيدة مكافئة للمعادلات المذكورة باشتقاق المعادلة الثانية بالنسبة للمتحول للمستقل  $x^2$  والمعادلة الثالثة





## 6-2-2-3- قانون السلوك

يربط قانون السلوك للحالة المبروسة بين جزء متوترة الإجهادات (6.77) وجزء متوترة التشوهات (6.76) والعلاقات التي تمثل قانون السلوك هنا هي بالتفصيل :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x^1x^1} \\ \sigma_{x^2x^1} \\ \sigma_{x^1x^2} \\ \sigma_{x^2x^2} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ \nu & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^2x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^2} \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

$$\sigma_{ij} = c^{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

هنا لابد من التنويه أن اختيار كتابه قانون السلوك بهذا الشكل نابع من حاجتنا لصياغة هذا القانون

بالشكل المتري و هذه الصياغة تؤدي إلى نفس النتيجة المعروفة في الصياغة العادية فمثلا الإجهاد القص  $\sigma_{x^1x^2}$  يساوي إلى :

$$\sigma_{x^1x^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{2} (1-\nu) (\varepsilon_{x^2x^1} + \varepsilon_{x^1x^2})$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma = G\gamma; \gamma = \varepsilon_{x^2x^1} + \varepsilon_{x^1x^2} \quad (6.91)$$

حيث  $\gamma$  التشوه القص المعروف في الصياغة العادية و G معامل مرونة القص .

## 6-2-2-4 - علاقات قوى المقطع - الانتقالات

نستبدل الآن علاقات التشوهات -الانتقالات (6.89) بعلاقة تربط بين التشوهات والانحناءات حيث تعطي الانحناءات بالعلاقة :

$$\chi_{ij} = -\frac{1}{2}(u^0_{x^3,ij} + u^0_{x^3,ji}) \quad (6.92)$$

و العلاقة للبتغة إذا :

$$\varepsilon_{ij} = x^3 \chi_{ij} \quad (6.93)$$

بتعويض هذه العلاقة في قانون السلوك نحصل على علاقة تربط بين الإجهادات و الانحناءات :

$$\sigma^{ij} = x^3 c^{ijkl} \chi_{kl} \quad (6.94)$$

ويتم الحصول على علاقات قوى المقطع -الانحناءات (قوى المقطع - مشتقات الانتقالات ) بإجراء التكاملات (6.78) , (6.79) , (6.80) , (6.81) بعد تعويض الإجهادات السوارة فيها بمكافئاتها من العلاقة (6.94) فنحصل بعد تجميع النتائج في كتابة مصفوفية على :

$$\begin{bmatrix} m^{x^1x^1} \\ m^{x^2x^1} \\ m^{x^1x^2} \\ m^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ \nu & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{x^1x^1} \\ \chi_{x^2x^1} \\ \chi_{x^1x^2} \\ \chi_{x^2x^2} \end{bmatrix}$$

$$m^{ij} = E^{ijkl} \chi_{kl} \quad (6-95)$$

### 3-2-3- المعادلة التفاضلية للمسألة

يتم الحصول على المعادلة التفاضلية التي تحكم المسألة المطروحة بتعويض علاقات قوى المقطع - الانحناءات (6-95) بعد استبدال الانحناءات بمشتقات الانتقالات من العلاقة (6-92) في معادلة توازن العزوم (6-87) وهي بالنتيجة المعادلة من الدرجة الرابعة :

$$\frac{\partial^4 u^0_{x^3}}{(\partial x^1)^4} + \frac{\partial^4 u^0_{x^3}}{(\partial x^1)^2 (\partial x^2)^2} + \frac{\partial^4 u^0_{x^3}}{(\partial x^2)^2 (\partial x^1)^2} + \frac{\partial^4 u^0_{x^3}}{(\partial x^2)^4} = \frac{\bar{p}(x^1, x^2)}{k}$$

$$u^0_{x^3,ij} = \frac{\bar{p}(x^1, x^2)}{k}; k = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6-96)$$

تعتمد الطريقة التحليلية على إيجاد حلول المعادلة التفاضلية (6-96) من الدرجة الرابعة. هذه الحلول تحتوي على ثوابت يتم تعيينها عن طريق تحقيق الشروط الطرفية . والشروط الطرفية التي يمكن تحقيقها يمثل هذه الثوابت هي شرطين طرفيين لكل طرف من أطراف البلاطة وفيما يلي سنستعرض الشروط الطرفية الأكثر شيوعاً للبلاطات.

#### 6-2-4- الشروط الطرفية

تكون أطراف البلاطات عادة إما موثوقة أو مستندة استناداً بسيطاً وإما حرة وهذه هي الحالات الأكثر مصادفة في المنشآت المختلفة. وفي الحالة التي تكون فيها البلاطة جزءاً من منشأ مركب يمكن تحديد طبيعة الشروط الطرفية وفق معطيات عمل المنشأ ككل، وطبيعة اتصال البلاطة مع أجزاء المنشأ المتبقية ويتم الاستعاضة عن تأثير بقية المنشأ بالبلاطة بقوة وعزوم طرفية أو بشروط هندسية للانتقالات. وفي مثل هذه المنشآت يتدخل عمل الشريحة وعمل البلاطة في وحدة متكاملة. إذ تتعرض البلاطات غالباً بالإضافة إلى الحملات العمودية على مستويها إلى حملات واقعة في مستويها والحالة الأخيرة تميز طبيعة عمل الشريحة .

##### طرف موثوق :

على الطرف الموثوق الذي معادلته  $x^1 = \text{const}$  يجب أن يكون الانتقال والدوران معلومين

$$u_{x^3}^0 = 0 \quad ; \quad u_{x^3, x^1}^0 = 0 \quad (6-97)$$

وباعتبار أن  $u_{x^3, x^2} = 0$  فيجب أن يكسبون أيضاً  $u_{x^3, x^1, x^2}^0 = 0$  وعليه يكون العزم

$$m^{x^1 x^2} = 0$$

##### طرف $x^1 = \text{const}$ مستند استناداً بسيطاً

يسمح الطرف المستند استناداً بسيطاً بالدوران حوله بينما تكون الانتقالات معلومة والطرف هذا غير قادر على مقاومة عزم الانعطاف  $m^{x^1 x^2}$  إذ يجب أن يكون هذا العزم معلوماً وتتلخص الشروط الطرفية إذاً بالشروطين :

$$u_{x^3}^0 = 0 \quad ; \quad m^{x^1 x^2} = -k(u_{x^3, x^1, x^1}^0 + \nu u_{x^3, x^2, x^2}^0) = 0 \quad (6.98)$$

يكون الدوران في اتجاه عمودي على الطرف المستند امتداداً بسيطاً معلوماً أي أن مشتق تابع الانتقالات بالنسبة للمتحول  $x^2$  معلوم ( $u_{x^3,x^2}^0 = 0$ ) وكذلك المشتق الثاني

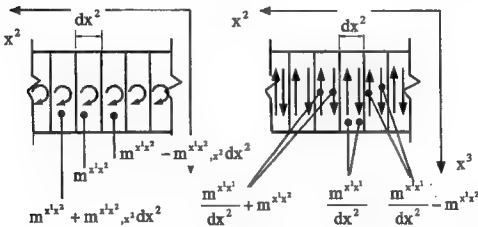
$$m^{x^1,x^1} = -k \quad u_{x^3,x^1}^0 = 0 \quad \text{وبالتالي يكون} \quad u_{x^3,x^2}^0 = 0$$

الطرف الحر  $x^1 = \text{const}$

على الطرف الحر تتعدم كافة قوى المقطع الطرفية وهي عزم الانعطاف وعزم الفتل والقوة القاصة . إذاً على مثل هذا الطرف لدينا ثلاث شروط طرفية :

$$m^{x^1,x^1} = 0 ; m^{x^1,x^2} = 0 ; q^{x^1} = 0 \quad (6.99)$$

يجب تحقيقها بينما تسمح حلول للمعادلة التفاضلية بتحقيق شرطين فقط على كل طرف. للتغلب على هذه الصعوبة التي نوه عنها سابقاً يجري دمج الشرطين الأخيرين من العلاقة (6-99) في شرط واحد بتحويل عزوم الفتل الحاصلة على هذا الطرف إلى مزدوجات قوى لتجميعها مع القوى القاصة الأخرى (شكل 11-). فبتقسيم الطرف إلى شرائح تفاضلية عرض كل منها  $dx^2$



شكل 11-6 : تحويل عزوم الفتل إلى قوى قاصة

وباعتبار أن عزم الفتل على شريحه ما  $m^{x^1,x^2}$  تكون قوى مزدوجة العزم على هذه الشريحة

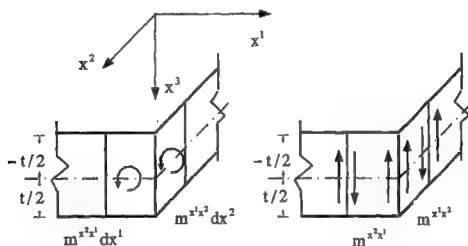
مساوية للمقدار  $\frac{m^{x^1,x^2}}{dx^2}$  في الشريحة المجاورة للسابقة بالاتجاه الموجب للمحور الإحداثي يتزايد

عزم الفتل بالمقدار  $m^{x^1x^2} + m^{x^1x^2}_{,x^2} dx^2$  وعليه تكون قوى مزدوجة العزم مكافئة للمقدار  $\frac{m^{x^1x^2}}{dx^2} + m^{x^1x^2}_{,x^2}$  وفارق حاصل هذه القوى هو  $m^{x^1x^2}_{,x^2}$  لأن هذه القوى تتعاضد مثنى مثنى على الشرائح الداخلية للبلطة. وبالتالي تكون قسوة القص البديلة على الطرف  $x^1 = \text{const}$

$$Q^{x^1} = q^{x^1} + m^{x^1x^2}_{,x^2} = -k[u^0_{x^3,x^1x^2} - (2-\nu)u^0_{x^3,x^2x^1}] \quad (6.100)$$

وكذلك على الطرف  $x^2 = \text{const}$  تكون قوة القص البديلة :

$$Q^{x^2} = -k[u^0_{x^3,x^2x^2} - (2-\nu)u^0_{x^3,x^1x^2}] \quad (6.101)$$



شكل 6-12: الشرائح الركنية ، القوى الركنية للتبقية

في الشرائح الركنية شكل (6-12) ليس لقوة مزدوجة العزم ما يعاكسها وعلى كل ركن من أركان البلاطة الأربعة لدينا قوة مقدارها  $(m^{x^2x^1} + m^{x^1x^2})$  يجب اعتبارها . وهذه القوة تحاول رفع أركان البلاطة الأربعة عند تحميلها وهنا ما يلاحظ تجريبيا. وعلى ركن حر غير مستند يجب أن تكون هذه القوة معلومة وهذا يحصل فقط عندما يكون :  $u^0_{x^3,x^1x^2} = 0$ .

## 6-2-5- حساب الإجهادات المتبقية

تسمح المعالجة السابقة بحساب جزء موترية الإجهادات (6.77) وفق العلاقة (6.94) . و منشور العلاقة الأخيرة التفصيلي بعد مراعاة العلاقتين (6.90) ، (6.92) هو :

$$\begin{aligned}\sigma^{1x^1} &= \frac{Ex^3}{1-\nu^2} (u^0_{x^3,x^1x^1} + \nu u^0_{x^3,x^2x^2}) \\ \sigma^{2x^2} &= -\frac{Ex^3}{1-\nu^2} (u^0_{x^3,x^2x^2} + \nu u^0_{x^3,x^1x^1}) \\ \sigma^{1x^2} &= \sigma^{2x^1} = -\frac{Ex^3}{1+\nu} u^0_{x^3,x^1x^2}\end{aligned}\quad (6.102)$$

أما الإجهادات المتبقية وهي  $\sigma^{3x^3}, \sigma^{2x^3}, \sigma^{1x^3}$  فلا يمكن حسابها من المعادلة السابقة إذ أنها لم تربط مع حالة التشوهات الحاصلة . و تقدير هذه الإجهادات يمكن أن يجري من دراسة معادلات التوازن (2.2a) على عنصر حتمي تفاضلي مقطوع من البلاطة . فمن معادلة التوازن على عنصر حتمي ينتج بإهمال القوى الحجمية  $\bar{f}^1$  و بمراعاة العلاقات (6.102) أن :

$$\begin{aligned}\sigma^{3x^1}_{,x^3} &= -\sigma^{1x^1}_{,x^1} - \sigma^{2x^1}_{,x^2} \\ &= -\frac{Ex^3}{1-\nu^2} (u^0_{x^3,x^1x^1} + u^0_{x^3,x^2x^2})_{,x^1}\end{aligned}\quad (6.103)$$

و بمكاملة هذه العلاقة مع مراعاة أن التابع  $u^0_{x^3}$  تابع فقط للمتحويلات  $x^2, x^1$  و أن قيمة التابع  $\sigma^{3x^1}$  معدومة على السطحين  $(x^3 = \pm \frac{t}{2})$  نحصل على قيمة الإجهاد  $\sigma^{3x^1}$  كتابع لارتفاع المقطع .

$$\sigma^{3x^1} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{(x^3)^2}{2} - \frac{t^2}{8} \right) (u^0_{x^3,x^1x^1} + u^0_{x^3,x^2x^2})_{,x^1} \quad (6.104)$$

يمكن الحصول على الإجهاد  $\sigma^{3x^3}$  بدلالة القوة القاسية التي يمكن حسابها بدلالة المعادلة الثالثة من العلاقات (6.85) بعد كتابة مشتقات العزوم الواردة فيها بدلالة الانتقالات بمساعدة العلاقتين (6.95) ، (6.92) فنحصل على :

$$q^{x^1} = m^{x^1 x^1}{}_{,x^1} + m^{x^2 x^1}{}_{,x^2} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (u^0_{x^3 x^1 x^1} + u^0_{x^3 x^2 x^2})_{,x^1} \quad (6.105)$$

وبناء عليه يكون الإجهاد  $\sigma^{x^3 x^1}$  مساويا للقيمة:

$$\sigma^{x^3 x^1} = \frac{3}{2} \frac{q^{x^1}}{t} \left[ 1 - \left( \frac{2x^3}{t} \right)^2 \right] \quad (6-106)$$

وبعملية مماثلة نحصل على الإجهاد :

$$\sigma^{x^3 x^2} = \frac{3}{2} \frac{q^{x^2}}{t} \left[ 1 - \left( \frac{2x^3}{t} \right)^2 \right] \quad (6-107)$$

أما الإجهاد  $\sigma^{x^3 x^3}$  فيمكن حسابه من العلاقة (2-2c) بعد إهمال القوى الحجمية  $\vec{f}^3$

$$\sigma^{x^3 x^3}{}_{,x^3} = \sigma^{x^1 x^3}{}_{,x^1} - \sigma^{x^2 x^3}{}_{,x^2} \quad (6-108)$$

وباشتقاق العلاقة (6-104) بالنسبة للمتحول  $x^1$  وكتابة علاقة مماثلة تعطي  $\sigma^{x^2 x^3}$  واشتقاقها بالنسبة للمتحول  $x^2$  وتعريض الناتج في العلاقة السابقة ينتج :

$$\sigma^{x^3 x^3}{}_{,x^3} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{t^2}{8} - \frac{(x^3)^2}{2} \right] \left( u^0_{x^3 x^1 x^1 x^1} + 2u^0_{x^3 x^1 x^2 x^2} + u^0_{x^3 x^2 x^2 x^2} \right) \quad (6-109)$$

وبمكاملة هذه العلاقة على ارتفاع اللقطع مع مراعاة العلاقة (6-96) والشروط الطرفية للتكامل

$$\text{حيث } 0 = \sigma^{x^3 x^3} \left( -\frac{t}{2} \right) = -\bar{p}^3(x^1, x^2) \sigma^{x^3 x^3} \left( \frac{t}{2} \right) \quad \text{نحصل على الإجهاد :}$$

$$\sigma^{x^3 x^3} = \bar{p}^3(x^1, x^2) \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left( \frac{x^3}{t} \right) - 2 \left( \frac{x^3}{t} \right)^3 \right] \quad (6.110)$$

## 6-2-6- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

بإهمال طاقة التشوه الداخلي العائد للقوى القاصصة والتشوهات القاصصة الموافقة لها يمكن الحصول على مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري لحالة البلاطة الرقيقة بتبديل موترة التشوهات بجزئها لحالة البلاطة الواردة في العلاقة (6-76) واستبدال معاملات المرونة العامة بجزئها الخاص للبلاطة الرقيقة الواردة في العلاقة (6-90) وبعد الأخذ بعين الاعتبار أن الحملات الخارجية تقتصر على حملات خارجية في اتجاه المحور  $x^3$  وأن الانتقال المحدد لوضعيات قيم التأثير في البلاطة هو الانتقال في ذلك الاتجاه يمكن أن نكتب :

$$\Pi = \sum_e \left( \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ij} c^{ijkl} \varepsilon_{kl} dV - \int_A \bar{p}^3 u_{x^3}^0 dA \right) - \sum_m \bar{f}^{(m)} u_{(m)}^0 \quad (6-111)$$

$$(6-112)$$

$$\delta \Pi = 0$$

حيث:  $\sum_e$  المجموع على عناصر البلاطة

$\bar{f}^{(m)}$  القوى الخارجية المركزة في الاتجاه (i) للمحور الإحداثي على العقدة (m) بما فيها العزوم.

$u_{(m)}^0$  شعاع انتقالات العقدة المحملة بقوى خارجية (انتقالات و دورانات).

$dV, dA$ : عنصرين تفاضليين سطحي وحجمي على التوالي للبلاطة .

وبعد تبديل جزء موترة التشوهات  $\varepsilon_{ij}$  بقيمتها الواردة في العلاقة (6-93) وتحويل التكامل الحجمي إلى تكامل على السطح وتكامل على ارتفاع المقطع نحصل على :

$$\Pi = \sum_e \left[ \frac{1}{2} \int_A \chi_{ij} \left( \int_{-1/2}^{1/2} x^3 c^{ijkl} x^3 dx^3 \right) \chi_{kl} dA - \int_A \bar{p}^3 u_{x^3}^0 dA \right] - \sum_m \bar{f}^{(m)} u_{(m)}^0 \quad (6-113)$$

وملاحظة أن التكامل المحصور بين القوسين الصغيرين الوارد في الحد الأول مكافئ للموترة  $E^{ijkl}$  الواردة في العلاقة (6-95) تصبح الطاقة الكامنة للبلاطة الرقيقة :

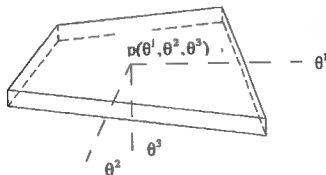


$$\Pi = \sum_e \left( \frac{1}{2} \int_A \chi_{ij} E_{ij}^{\text{int}} \chi_{kl} dA - \int_A \bar{P}^3 u_{x^3}^0 dA \right) - \sum_m \bar{f}^m u_{(m)}^0 \quad (6-114)$$

### 3-6- نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية

#### 6-3-1- مجاهيل نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية

تعتبر الفرضيات التسهيلية الواردة في بداية هذا الفصل سارية المفعول أيضاً لحالة البلاطة الرقيقة المنسوبة إلى جملة محاور إحداثية طبيعية  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  شكل (6-13). حيث يتطابق المحوران الطبيعي  $\theta^3$  والديكارتي  $x^3$ . وعلى غرار المناقشة التي وردت بالنسبة للإحداثيات الديكارتية يكفي تعيين انتقالات السطح الوسطي للبلاطة باتجاه المحور  $\theta^3$  أي تعيين التابع  $(u_3^0(\theta^1, \theta^2))$  للسطح الوسطي للتمكن من تعيين المجاهيل الحركية والستاتيكية للمسألة. باعتبار أن الدوران حول المحور  $\theta^1$  هو  $\varphi_1$  والدوران حول المحور  $\theta^2$  هو  $\varphi_2$  نستطيع بناء على هذه الفرضيات التسهيلية إيجاد مركبات شعاع الانتقالات  $u_\alpha$  لنقطة ما لاعلى التعيين  $p(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  وهذه المركبات هي:



شكل 6-13 الإحداثيات الطبيعية في نقطة ما لاعلى التعيين

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_2 \cdot \theta^3 \\ u_2 &= -\varphi_1 \cdot \theta^3 \\ u_3 &= u_3^0 \end{aligned} \quad (6-115)$$

يفهم ضمناً بأن هذه المركبات هي المركبات الأساسية لشعاع الانتقال والذي يتم نسبه إلى أشعة القاعدة الضدية ( $u = u_a \cdot g^a$ ). تحسب الدورانات حول المحاور الطبيعية وفقاً لفرضيات كيرشوف-لوف كما يلي:

$$\varphi_1 = \frac{\partial u_3}{\partial \theta^2} = u_{3,2} \quad (6-116)$$

$$\varphi_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial \theta^1} = -u_{3,1}$$

يعبر عن انتقالات نقطة ما لا على التعيين بدلالة انتقالات المستوي الوسطي للبلاطسة بتعويض (6-116) في (6-115):

$$\begin{aligned} u_1 &= -\theta^3 \cdot u_{3,1} \\ u_2 &= -\theta^3 \cdot u_{3,2} \end{aligned} \quad (6-117)$$

$$u_3 = u_3$$

تصاغ للمعادلتان الأولى والثانية من العلاقة السابقة باستخدام القرائن في المعادلة الوحيدة التالية:

$$u_a = -\theta^3 \cdot u_{3,a} \quad (6-118)$$

يرتبط جزء موتر الإجهادات في الإحداثيات الطبيعية مع مثيله في الإحداثيات الديكارتية بدستور التحويل الخاص بالموترات من المرتبة الثانية على الشكل:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = g_i^a \cdot g_j^b \cdot \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \quad (6-119)$$

وجزاء موتر الإجهادات المرتبط بموتر التشوهات السابق هو:

$$\sigma^{\alpha\beta} = g_i^a \cdot g_j^b \cdot \sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix} \quad (6-120)$$

وترتبط قوى المقطع في الإحداثيات الطبيعية مع مثيلاتها الديكارتية بالعلاقات التالية :

$$m^{\alpha\beta} = g_i^a \cdot g_j^b \cdot m^{ij} \quad (6-121)$$

$$q^a = g_i^a \cdot q^i \quad (6-122)$$

حيث تمثل عزوم المقطع موتر من المرتبة الثانية والقوى القاصة فيه موتر من المرتبة الأولى.

وقوى للمقطع هذه هي التكاملات على ارتفاع المقطع للإجهادات في الإحداثيات الطبيعية ويمكن الحصول عليها على غرار العلاقات من (6-78) إلى (6-83) باستبدال الإجهادات المنسوبة إلى الإحداثيات الديكارتية بمثلثاتها للموافقة لها في الإحداثيات الطبيعية واستبدال الإحداثي الديكارتى  $x^3$  بالموافق له الطبيعي  $\theta^3$  ، مع العلم أن قوى المقطع يجب أن تحسب لوحدة طول مقدارها  $\sqrt{g}$  . والعلاقات التي تحدد قوى المقطع يمكن اختصارها بالشكل :

$$q^{\alpha} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{g} \cdot \sigma^{\alpha 3} \cdot d\theta^3 \quad (6-123)$$

$$m^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{g} \cdot \sigma^{\alpha\beta} \cdot \theta^3 \cdot d\theta^3$$

للحصول مثلاً على موترة التشوهات في الإحداثيات الديكارتية من مثلثاتها في الإحداثيات الطبيعية نضرب العلاقة (6-119) بمركبات أشعة القاعدة الضدية فنحصل على:

$$g_k^{\alpha} \cdot g_l^{\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} = g_k^{\alpha} \cdot g_l^{\beta} \cdot g_1^{\alpha} \cdot g_1^{\beta} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (6-124)$$

وباعتبار أن :

$$g_1^{\alpha} \cdot g_k^{\alpha} = \delta_k^{\alpha} \quad ; \quad g_1^{\beta} \cdot g_l^{\beta} = \delta_l^{\beta} \quad (6-125)$$

وأن رمز كرونيكر يدل القرينة التي يتم عليها الجمع بالقرينة الأخرى المستقلة ينتج:

$$g_k^{\alpha} \cdot g_l^{\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_k^{\alpha} \cdot \delta_l^{\beta} \cdot \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kl} \quad (6-126)$$

إذا استبدلت القرينة  $i$  بالقرينة  $k$  والقرينة  $j$  بالقرينة  $l$  في الطرف الثاني من العلاقة السابقة ، والعلاقة التالية :

$$\varepsilon_{lj} = g_i^{\alpha} \cdot g_j^{\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (6-127)$$

هي نفسها العلاقة (6-126) والأمر لا يتعلق بتسمية القرائن ، وإنما بطريقة التحويل والانتباه إلى القرائن المستقلة والقرائن التي يتم عليها الجمع. وبشكل مشابه نحول الموترات المثلثة لقيم التأثير الأخرى:

$$\sigma^{ij} = g_i^{\alpha} \cdot g_j^{\beta} \cdot \sigma^{\alpha\beta} \quad (6-128)$$

$$m^{\parallel} = g^i_{\alpha} \cdot g^j_{\beta} \cdot m^{\alpha\beta} \quad (6-129)$$

$$q^i = g^i_{\alpha} \cdot q^{\alpha} \quad (6-130)$$

وسوف نستخدم هذه العلاقات في الفقرات المقبلة لتحويل معادلات نظرية المرونة من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الطبيعية.

### 6-3-2-معادلات نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية

#### 6-3-2-1-معادلات التوازن

قبل تحويل معادلات التوازن إلى الإحداثيات الطبيعية يجب التنويه إلى أن جداء من الشكل  $g^i_{\alpha} \cdot g^j_{\beta}$  ليس له معنى في علم قواعد حساب المتغيرات إذا ما أريد التعبير عن جداء بالشكل  $g^i_{\alpha} \cdot g^j_{\beta} \cdot \delta^{\alpha}_{\gamma}$  وذلك لأن الجداءات  $g^i_{\alpha} \cdot g^j_{\beta}$  غير ممثلة كلها في الجداء  $g^i_{\alpha} \cdot g^j_{\beta}$ . ولذلك يتجنب المرء تكرار استخدام القرائن نفسها أضف إلى ذلك أن استخدام القرينة نفسها قد يؤدي إلى نتائج مغلوطة فمثلا لا يمكن التعبير عن رمز كرونيكر  $\delta^{\alpha}_{\beta}$  بالشكل  $\delta^{\alpha}_{\beta}$  إذ أن  $3 = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}$  وهنا يخالف للتعريف القائل بأن قيمة رمز كرونيكر تساوي الواحد عندما  $i=j$  والصفر عندما  $i \neq j$ .

الآن لتحويل معادلات التوازن (6-86) إلى الإحداثيات الطبيعية نلاحظ فيها أنه يتم الجمع على القرينة  $i$  لهذا نستبدل القرينة  $i$  بقرينة أخرى  $k$  باستخدام رمز كرونيكر وتكون معادلات التوازن هذه مكافئة لـ:

$$m^{\parallel}_{,k} \cdot \delta^k_i - q^i = 0 \quad (6-131)$$

باعتبار أن المشتق الأساسي  $m^{\alpha\beta}$  يملك خواص المتوترة فالتحويل بينه وبين  $m^{\parallel}_{,k}$  يتم ونسق قواعد حساب المتغيرات بالشكل:

$$m^{\parallel}_{,k} = g^i_{\alpha} \cdot g^j_{\beta} \cdot g^{\gamma}_k \cdot m^{\alpha\beta}_{,j} \quad (6-132)$$

حيث يتم تحويل كل قرينة بأشعة القاعدة المرتبطة بها وفق موضعها في الأسفل أو في الأعلى. ويتحول مركبات القوى القاسية أيضا نحصل على:

$$g^i_\alpha \cdot g^j_\beta \cdot g^{\gamma}_k \cdot \delta_i^k \cdot m^{\alpha\beta} |_7 - g^j_\beta \cdot q^\beta = 0 \quad (6-133)$$

وعلاحة أن :

$$g^i_\alpha \cdot g^{\gamma}_k \cdot \delta_i^k = g^i_\alpha \cdot g^{\gamma}_i = \delta_\alpha^\gamma \quad (6-134)$$

نحصل بعد إخراج  $g^j_\beta$  خارج قوسين على :

$$g^j_\beta (m^{\alpha\beta} |_7 \cdot \delta^\gamma_\alpha - q^\beta) = 0 \quad (6-135)$$

وبضرب هذه للمعادلة بـ  $g^{\delta}_j$  نحصل على :

$$\begin{aligned} g^{\delta}_j g^j_\beta (m^{\alpha\beta} |_7 \cdot \delta^\gamma_\alpha - q^\beta) &= 0 \quad \delta^{\delta}_\beta (m^{\alpha\beta} |_7 \cdot \delta^\gamma_\alpha - q^\beta) = 0 \\ &= \delta^{\delta}_\beta (m^{\alpha\beta} |_7 - q^\beta) = (m^{\alpha\delta} |_7 - q^\delta) \end{aligned} \quad (6.136)$$

وهي نفس العلاقة فيما لو كتبنا :

$$m^{\alpha\beta} |_7 - q^\beta = 0 \quad ; \quad m^{\alpha\delta} |_7 - q^\delta = 0 \quad (6-137)$$

وذلك باعتبار تناظر مؤثرة عزوم المقطع.

وبنفس الأسلوب يتم تحويل معادلة توازن القوى القاصية (المعادلة الأولى من العلاقة (6-86)) لتأخذ الشكل:

$$q^\alpha |_7 + \bar{p}^3 = 0 \quad (6-138)$$

## 6-3-2-2-علاقات التشوهات-الانتقالات

يتم تحويل علاقات التشوهات -الانتقالات من الإحداثي الديكارتي إلى الإحداثي الطبيعي بضرب طرفي علاقة التشوهات-الانتقالات في الإحداثي الديكارتي بـ  $g^i_\alpha \cdot g^j_\beta$  :

$$g^i_\alpha \cdot g^j_\beta \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} g^i_\alpha \cdot g^j_\beta (u_{ij} + u_{ji}) \quad (6-139)$$

وعلاحة العلاقتين (6-119) و(6-49) تصبح علاقات التشوهات-الانتقالات في الإحداثيات الطبيعية كما يلي:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha}) \quad (6-140)$$

والمشتقات الواردة في العلاقة السابقة هي مشتقات أساسية ولها خواص الموترات ومعرفة كما في العلاقة (6-51).

نريد الآن صياغة المشتق الأساسي  $u_{\alpha\beta}$  بدلالة الانتقال  $u_3^\alpha$  وتعريف المشتق الأساسي من المرتبة الثانية للقيمة الأخيرة وذلك للمحافظة على خواص تحويله كموترة من المرتبة الثانية. يمكن صياغة العلاقة (6-118) بتحويل طرفها الثاني إلى الإحداثي الديكارتي بالشكل:

$$u_\alpha = -\theta^3 \cdot g^1_\alpha \cdot u_{3,1}^\alpha \quad (6-141)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ  $\beta$  ينتج:

$$\begin{aligned} u_{\alpha,\beta} &= -\theta^3 (g^1_{\alpha,\beta} \cdot u_{3,1}^\alpha + g^1_\alpha \cdot \frac{\partial u_{3,1}^\alpha}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial \theta^\beta}) \\ &= -\theta^3 (g^1_{\alpha,\beta} \cdot g_1^\gamma u_{3,\gamma}^\alpha + g^1_\alpha \cdot g^1_\beta \cdot u_{3,1}^\alpha) \end{aligned} \quad (6-142)$$

في الحد الأول من الطرف الثاني للعلاقة السابقة حولت  $u_{3,1}^\alpha$  إلى الإحداثي الطبيعي ثانية، وينقل هذا الحد إلى الطرف الأول بعد ملاحظة العلاقة (6-118) نحصل على:

$$u_{\alpha,\beta} - g^1_{\alpha,\beta} \cdot g_1^\gamma \cdot u_\gamma = u_{\alpha\beta} = -\theta^3 \cdot g^1_\alpha \cdot g^1_\beta \cdot u_{3,1}^\alpha \quad (6-143)$$

نعرف الآن المشتق الأساسي من المرتبة الثانية للانتقال  $u_3^\alpha$  بالشكل:

$$u_{3,\alpha\beta}^\alpha = g^1_\alpha \cdot g^1_\beta \cdot u_{3,1}^\alpha \quad (6-144)$$

يلاحظ أن الطرف الثاني يحول كموترة من المرتبة الثانية، وبضرب هذه العلاقة بالجداء  $g_k^\alpha \cdot g_1^\beta$  نحصل على علاقة التحويل بالاتجاه المعاكس:

$$u_{3,k}^\alpha = g_k^\alpha \cdot g_1^\beta \cdot u_{3,\alpha\beta}^\alpha \quad (6-145)$$

ومغازنة العلاتين (6-143)-(6-144) نحصل على الصياغة المطلوبة :

$$u_{\alpha\beta} = -\theta^3 \cdot u_{3,\alpha\beta}^\alpha \quad (6-146)$$

وبالتالي يمكن التعبير عن موترة التشوهات بدلالة المشتق الأساسي من المرتبة الثانية للانتقال:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \theta^3 (u_{3,\alpha\beta}^\alpha + u_{3,\beta\alpha}^\alpha) \quad (6-147)$$

يحتوي جزء موترة التشوهات هذا على التشوهات  $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{11}$  أما تشوهات القصر  $\varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$  فتعتمد في علاقات مشابهة للعلاقة (6-75).

### 6-3-2-3- قانون السلوك

للحصول على قانون السلوك للمادة في الإحداثيات الطبيعية نعوض جزء متوتر التشوهات (127-6) وجزء متوتر الإجهادات (128-6) في قانون السلوك الخطي لحالة الإحداثيات الديكارتية (90-6) فنتج لدينا العلاقة التالية :

$$g^i_\alpha \cdot g^j_\beta \cdot \sigma^{\alpha\beta} = c^{ikl} \cdot g^i_k \cdot g^j_l \cdot \varepsilon_{\gamma\delta} \quad (6-148)$$

بضرب هذه العلاقة من الطرفين بالجلء  $g_i^\eta \cdot g_j^\zeta$  نحصل على :

$$g_i^\eta \cdot g_j^\zeta \cdot g^i_\alpha \cdot g^j_\beta \cdot \sigma^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\eta \cdot \delta_\beta^\zeta \cdot \sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\eta\zeta} \\ = g_i^\eta \cdot g_j^\zeta \cdot c^{ikl} \cdot g^i_k \cdot g^j_l \quad (6-149)$$

يلاحظ أنه إذا ألحقنا مركبات أشعة القاعدة الضدية بمعاملات المرونة للمادة بالشكل:

$$c^{\eta\zeta\theta} = g_i^\eta \cdot g_j^\zeta \cdot c^{ikl} \cdot g^i_k \cdot g^j_l \quad (6-150)$$

لتمكنا من معاملة معاملات المرونة كموترة من المرتبة الرابعة إذ يتم تحويلها تماماً بنفس أسلوب تحويل المتوتر من المرتبة الرابعة ولأصبحت العلاقة (149-6) كالتالي:

$$\sigma^{\eta\zeta} = c^{\eta\zeta\theta} \cdot \varepsilon_{\theta} \quad \text{أو} \quad \sigma^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta\theta} \cdot \varepsilon_{\theta} \quad (6-151)$$

يمكن الآن أن نطلق على معاملات المرونة متوتر المرونة للمادة ويمكن الاستنتاج أن تحويلها بالشكل للمعكس أي من الإحداثيات الطبيعية إلى الإحداثيات الديكارتية يتم بالشكل التالي:

$$c^{ikl} = g^i_\alpha \cdot g^j_\beta \cdot c^{\alpha\beta\theta} \cdot g^k_\gamma \cdot g^l_\delta \quad (6-152)$$

### 6-3-2-4- علاقات قوى المقطع-الانتقالات

على غرار تعريف الانحناءات المنسوبة إلى الإحداثيات الديكارتية نعرف الانحناءات في الإحداثيات الطبيعية بالشكل:

$$\chi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (u^\circ_{\beta\alpha\beta} + u^\circ_{\beta\alpha\alpha}) \quad (6-153)$$

وعلى هذا الأساس يمكن صياغة جزء موترة التشوهات في الإحداثيات الطبيعية بدلالة الانحناءات النسبية إليها بالشكل:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \theta^3 \cdot \chi_{\alpha\beta} \quad (6-154)$$

وتكون موترة الإجهادات في الإحداثيات الطبيعية مكافئة لـ :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \theta^3 \cdot c^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \chi_{\gamma\delta} \quad (6-155)$$

وبمعاملة الإجهادات على ارتفاع المقطع بشكل مماثل لما فعلناه في الحالة الديكارتية نحصل على موترة عزوم المقطع التالية:

$$m^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \chi_{\gamma\delta} \quad (6-156)$$

يمكن معاملة  $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$  معاملة للموترة ، ويجري تحويله بشكل مشابه للموترة  $c^{\alpha\beta\gamma\delta}$  بالشكل:

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_1^\alpha \cdot g_2^\beta \cdot g_3^\gamma \cdot g_4^\delta \cdot E^{ijkl} \cdot g_k^i \cdot g_l^j \cdot g_1^i \cdot g_1^j \quad (6-157)$$

أو بالاتجاه العكسي:

$$E^{ijkl} = g_1^i \cdot g_1^j \cdot g_2^k \cdot g_3^l \cdot E^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot g_\alpha^i \cdot g_\beta^j \cdot g_\gamma^k \cdot g_\delta^l \quad (6-158)$$

### 6-3-3-المعادلة التفاضلية في الإحداثيات الطبيعية:

يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية في الإحداثيات الطبيعية بنفس الطريقة التي تم بها الحصول عليها في الإحداثيات الديكارتية. إذ نقوم أولاً بتشكيل معادلة توازن عزوم المقطع في الإحداثيات الطبيعية بمحذ القوى القاصية من المعادلة (6-138) وذلك باشتقاق المعادلة (6-137) وتعويض الناتج في المعادلة (6-138) بالشكل:

$$m^{\alpha\beta} |_{p_\alpha} = -p^3 \quad (6-159)$$

في هذه العلاقة يتم الجمع على القريتين  $\alpha, \beta$  . ويمكن استنتاج هذه العلاقة من مثيلتها الديكارتية (6-87) بتحويل هذه الأخيرة إلى الإحداثيات الطبيعية وفق قواعد التحويل السابقة الذكر. ومن ثم نعوض علاقات قوى المقطع-الانحناءات (6-156) في العلاقة (6-159) وذلك بعد استبدال الانحناءات بمشتقات الانتقالات من العلاقة (6-153) وبعد الإجراءات السابقة نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:



$$(E^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot u_{3\gamma\delta}^{\circ})|_{\alpha\beta} = \bar{p}^3 \quad (6-160)$$

يلاحظ في هذه العلاقة أن الجمع يتم أيضا على القريتين  $\alpha, \beta$  وأنه يجب أن نعرف المشتق الأساسي من الدرجة الرابعة للانتقال  $u_3^{\circ}$ ، ولهذا الغرض ننتقل من العلاقة (6-144) التي عرف بها المشتق الأساسي من المرتبة الثانية للانتقال  $u_3^{\circ}$ . ونعتمد بنفس الطريقة إلى تعريف المشتق الأساسي من المرتبة الثالثة لهذا الانتقال بحيث يملك خواص موترية من المرتبة الثالثة بالشكل:

$$u_{3\alpha\beta\gamma}^{\circ} = g_{\alpha}^i \cdot g_{\beta}^j \cdot g_{\gamma}^k \cdot u_{3,ijk}^{\circ} \quad (6-161)$$

وبإتباع خطوات مشابهة لما ورد في إيجاد المشتق الأساسي من المرتبة الثانية فسوف نجد أن :

$$u_{3\alpha\beta\gamma}^{\circ} = (u_{3\alpha\beta}^{\circ})_{,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \cdot u_{3\eta\beta}^{\circ} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon} \cdot u_{3\alpha\epsilon}^{\circ} \quad (6-162)$$

ورمز كريستوفل الواردة في هذه العلاقة يمكن استنتاجها على غرار تلك الواردة في العلاقة (52-6) ويعرف المشتق الأساسي من المرتبة الرابعة للانتقال  $u_3^{\circ}$  بالشكل:

$$u_{3\alpha\beta\gamma\delta}^{\circ} = g_{\alpha}^i \cdot g_{\beta}^j \cdot g_{\gamma}^k \cdot g_{\delta}^l \cdot u_{3,ijkl}^{\circ} \quad (6-163)$$

وهذا المشتق يمكن الحصول عليه من المشتق الأساسي (6-161) بإتباع نفس خطوات الاشتقاق بالشكل:

$$u_{3\alpha\beta\gamma\delta}^{\circ} = (u_{3\alpha\beta\gamma}^{\circ})_{,\delta} - \Gamma_{\alpha\delta}^{\eta} \cdot u_{3\eta\beta\gamma}^{\circ} - \Gamma_{\beta\delta}^{\epsilon} \cdot u_{3\alpha\epsilon\gamma}^{\circ} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\epsilon} \cdot u_{3\alpha\beta\epsilon}^{\circ} \quad (6-164)$$

ويمكن الحصول أيضا على المعادلة التفاضلية في الإحداثيات الطبيعية بتحويل مثلتها في الإحداثيات الديكارتية (6-96) إلى الإحداثيات الطبيعية لهذا الغرض نكتب الأخيرة بالشكل :

$$k \cdot u_{3,ijkl}^{\circ} \cdot \delta_j^k \cdot \delta_i^l = \bar{p}^3 \quad (6-165)$$

حتى يتم تلافي عرق قاعدة الجمع لـ Einstein وذلك باعتبار أن الجمع يتم على القريتين  $j, i$ .  
والعلاقة السابقة يمكن تحويلها إلى الإحداثيات الطبيعية باستخدام معكوس العلاقة (6-163) التالي:

$$u_{3,ijkl}^{\circ} = g_i^{\alpha} \cdot g_j^{\beta} \cdot g_k^{\gamma} \cdot g_l^{\delta} \cdot u_{3\alpha\beta\gamma\delta}^{\circ} \quad (6-166)$$

وذلك بالشكل :

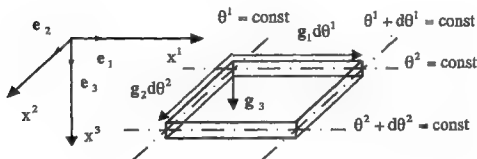
$$k \cdot g_i^{\alpha} \cdot g_j^{\beta} \cdot g_k^{\gamma} \cdot g_l^{\delta} \cdot \delta_j^k \cdot \delta_i^l \cdot u_{3\alpha\beta\gamma\delta}^{\circ} = \bar{p}^3 \quad (6-167)$$

والمعادلة الأخيرة تمثل المعادلة التفاضلية في الإحداثيات الطبيعية.

ملاحظة: في العلاقات (6-165) و (6-167) يجب التمييز بين  $k$  المستخدمة كقرينة و  $k$  المستخدمة للتعبير عن قساوة البلاطة.

### 6-3-4- مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري

قبل تحويل مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري من الإحداثيات الديكارتية العلاقات (6-111) و (6-112) إلى (6) لابد من إيجاد العنصر الحجمي  $dV$  في الإحداثيات الطبيعية والمقابل لمثيله  $dV = dx^1 dx^2 dx^3$  في الإحداثيات الطبيعية والمقابل لمثيله في الإحداثيات الديكارتية  $dA = dx^1 dx^2$ .



شكل 6-14: العنصر الحجمي والعنصر السطحي

لنبداً الآن بحساب عنصر تفاضلي سطحي  $dA$  مقطوع من بلاطة بين تزايد الخط الإحداثي الطبيعي  $\theta^1 = \text{const}$  إلى  $\theta^1 + d\theta^1 = \text{const}$ ، وتزايد الخط الإحداثي الطبيعي  $\theta^2 = \text{const}$  إلى  $\theta^2 + d\theta^2 = \text{const}$ ، انظر الشكل (6-14). يمكن التعبير عن التزايد التفاضلي على الخط الإحداثي الطبيعي  $\theta^2 = \text{const}$  لتفسير الإحداثي الطبيعي مسن  $\theta^1 = \text{const}$  إلى  $\theta^1 + d\theta^1 = \text{const}$  بالشعاع  $g_1 \cdot d\theta^1$ ، والتزايد التفاضلي على الخط الإحداثي الطبيعي

$\theta^1 = \text{const}$  بتغير الإحداثي الطبيعي من  $\theta^2 = \text{const}$  إلى  $\theta^2 + d\theta^2 = \text{const}$  بالشعاع  $g_2 \cdot d\theta^2$  ومساحة متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين مساو إلى:

$$dA = |g_1 \times g_2| d\theta^1 d\theta^2 \quad (6-168)$$

أو:

$$dA = \sqrt{(g_1 \times g_2) \cdot (g_1 \times g_2)} d\theta^1 d\theta^2 \quad (6-169)$$

ولحساب الجداء نستعمل قاعدة جداءات الأشعة التالية:

$$(u \times v)(y \times z) = (u \cdot y)(v \cdot z) - (v \cdot y)(u \cdot z) \quad (6-170)$$

وذلك باعتبار  $u, v, y, z$  أشعة ما لا على التتبعين. وتطبيق هذه القاعدة على الجداء تحت الجذر نحصل على:

$$dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \quad (6-171)$$

وذلك بعد مراعاة العلاقة (6-18).

لحساب العنصر الحجمي  $dV$  يجب أن نعين أيضا الشعاع  $g$  وهو لحالة عنصر من بلاطة مستوية ثابت ومساو إلى شعاع الواحدة على المحور  $x^3$  لتطابق المحورين  $x^3, \theta^3$ . أي أن  $e_3 = g_3$  وطويلة هذا الشعاع بالتالي مساوية للواحد، وتزايد العنصر التفاضلي باتجاه  $\theta^3$  يعبر عنه بالشعاع  $g_3 d\theta^3$  وبالتالي يكون العنصر الحجمي:

$$dV = (g_1 d\theta^1 \times g_2 d\theta^2) \cdot g_3 d\theta^3 = \sqrt{g} \cdot 1 \cdot d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (6-172)$$

يمكن الآن تحويل الطاقة الكامنة (6-111) من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الطبيعية باستخدام العلاقات (6-127), (6-150), (6-171), (6-172) وبعد اعتبار المعادلة الثالثة مسن العلاقة (6-115) وأن الجمولات  $\vec{p}^3$  لا تتغير بعد نسبها إلى الإحداثيات الطبيعية نحصل على:

$$\Pi = \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{\alpha\beta} c^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\delta} dV - \int_A \vec{p}^3 u_{\delta}^3 dA \right) - \sum_m \bar{F}^{(m)} u_{(m)}^{\delta} \quad (6-173)$$

نبدل الآن جزء موتر التشوهات  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  بقيمته الواردة في العلاقة (6-154) ونغول التكامل الحجمي إلى تكامل على السطح وعلى ارتفاع للمقطع فنحصل على:

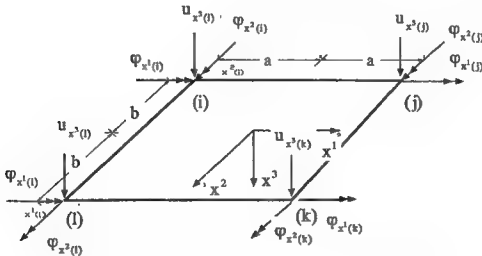
$$\Pi = \sum_{\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \chi_{\alpha\beta} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \theta^3 c^{\alpha\beta\gamma\delta} \theta^3 d\theta^3 \right) \chi_{\gamma\delta} dA - \int_{\Lambda} \bar{p}^3 u_3^* dA \right] - \sum_{(m)} \bar{F}^{(m)} u_{(m)}^* \quad (6-174)$$

والتكامل المحصور بين القوسين الصغيرين يساوي إلى الموترة  $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$  المعطاة بالعلاقة (6-157) وبالتالي يكون:

$$\Pi = \sum_{\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \chi_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} \chi_{\gamma\delta} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 - \int_{\Lambda} \bar{p}^3 u_3^* \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \right] - \sum_{(m)} F^{(m)} u_{(m)}^* \quad (6-175)$$

وهو تعبير الطاقة الكامنة في الإحداثيات الطبيعية لبلاطة رقيقة تحت تأثير الحمولات الخارجية المعتمة، وفي حالة وجود حمولات موزعة مؤثرة على أطراف العناصر المنتهية يجب اعتبار العمل الذي تؤديه مثل هذه القوى في البلاطة السابقة. وللإلمام بجوانب الموضوع سوف ندرس في الفقرة القادمة عنصر منته مستطيل من نموذج الانتقالات في الإحداثيات الديكارتية. وهذا العنصر معروف في المصادر العلمية بأنه العنصر ACM لبلاطة رقيقة. ومن ثم نتقل إلى معالجة عنصر مطور عنه بالطريقة المقترحة لربط الحمولات بتتابع الانتقالات وستتم الدراسة الأخيرة في الإحداثيات الطبيعية.

#### 6-4- عنصر منته مستطيل من نموذج الانتقالات



شكل (6-15): عنصر منته مستطيل لبلاطة رقيقة، المحاور الإحداثية، درجات الحرية.

لنقتطع من بلاطة مستوية عنصرا متنها مستطيلا أبعاده  $2a.x2b$  ولننسه إلى جملة محاور إحداثية ديكارتية شكل(6-15). لكل عقدة من عقد العنصر ثلاث درجات حرية وهي مثلا للعقدة (i) الانتقال  $u_x$  في اتجاه  $x^3$  والدوران  $\varphi_{x^1}$  حول  $x^1$  والدوران  $\varphi_{x^2}$  حول  $x^2$ . وبالتالي يمكننا فرض تابع انتقالات يحتوي على اثني عشر ثابتا إمكانية تحديد هذه الثوابت بدلالة انتقالات العقد.

اختبر لوصف الحالة الانتقالية ضمن العنصر المنتهي التابع التالي:

$$\begin{aligned} u_{x^3}^*(x^1, x^2) &= c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 (x^1)^2 + c_4 x^1 x^2 + c_5 (x^2)^2 + c_6 (x^1)^3 + c_7 (x^1)^2 x^2 \\ &\quad + c_8 x^1 (x^2)^2 + c_9 (x^2)^3 + c_{10} (x^1)^3 x^2 + c_{11} x^1 (x^2)^3 \\ &= x^n \cdot c_n \end{aligned} \quad (6-176)$$

وهذا التابع هو من التوابع التقريبية للمصنف في المصادر العلمية كـ *sserendipity class* وهو تابع غير كامل لافتقاره إلى كافة حدود المرتبة الرابعة من مثلث باسكال وهي:  $(x^2)^4, (x^2)^2 (x^1)^2, (x^1)^3 x^2, (x^1)^4$  على التوالي. ولكنه يبدى سلوكا حسنا في تقاربه إلى الحل الدقيق. باستبعاد العلاقات (6-73) تشتق الدورانات  $\varphi_{x^2}, \varphi_{x^1}$  ضمن العنصر المنتهي، وبعد القيام بهذا الإجراء وتجميع العلاقات الناتجة بشكل مصفوفي نحصل على الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} u_{x^3}^* \\ \varphi_{x^1} \\ \varphi_{x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 & (x^1)^2 & x^1 x^2 & (x^2)^2 & (x^1)^3 & (x^1)^2 x^2 & x^1 (x^2)^2 & (x^2)^3 & (x^1)^3 x^2 & x^1 (x^2)^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2x^1 & -x^2 & -3(x^1)^2 & -2x^1 x^2 & -(x^2)^3 & -3(x^1)^3 x^2 & -2x^1 (x^2)^3 & -(x^2)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$u_i^* = x_i^n c_n, \quad i=1,2,3, \quad n=0,1,2,\dots,11 \quad (6-177)$$

حيث يعبر  $u_i^*$  الآن عن الشعاع الوارد في الطرف اليساري للعلاقة السابقة. بتعويض إحداثيات العقد (i),(j),(k),(l) في العلاقة السابقة نحصل على جملة معادلات خطية مؤلفة من اثني عشر معادلة على الشكل التالي:

$$u_{i(p)}^* = A_{i(p)}^n c_n, \quad (p) = (i), (j), (k), (l) \quad (6-178)$$

بجاءيلها هي الثوابت الاختيارية  $c_n$ ،  $u_{i(p)}^*$  هي انتقالات ودورانات عقد العنصر  $A_{i(p)}^n$  مصفوفة تحتوي فقط على قيم معلومة متعلقة بالإحداثيات الديكارتية لعقد العنصر المنتهي. تبين التجربة أن المصفوفة  $A_{i(p)}^n$  قابلة في هذه الحالة للعكس دوماً. باعتبار معكوسها  $B_n^{i(p)}$  تحدد الثوابت الاختيارية بدلالة انتقالات العقد بالشكل:

$$c_n = B_n^{i(p)} u_{i(p)} \quad (6-179)$$

نعوض الآن الثوابت الاختيارية في العلاقة (6-176) فنحصل على العلاقة التالية:

$$u_{x,3}^* = x^* B_n^{j(p)} u_{j(p)} = N^{j(p)} u_{j(p)} \quad (6-180)$$

حيث  $N^{j(p)}$  نوابغ الشكل وهي:

$$N^{1(i)} = [2 - 3\theta^1 - 3\theta^2 + 4\theta^1\theta^2 + (\theta^1)^3 + (\theta^2)^3 - (\theta^1)^3\theta^2 - \theta^1(\theta^2)^3]/8$$

$$N^{2(i)} = [1 - \theta^1 - \theta^2 + \theta^1\theta^2 - (\theta^2)^2 + \theta^1(\theta^2)^2 + (\theta^2)^3 - \theta^1(\theta^2)^3]/8$$

$$N^{3(i)} = [-1 + \theta^1 + \theta^2 + (\theta^1)^2 - \theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 - (\theta^1)^2\theta^2 + (\theta^1)^3\theta^2]/8$$

$$N^{1(j)} = [2 + 3\theta^1 - 3\theta^2 - 4\theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 + (\theta^2)^3 + (\theta^1)^3\theta^2 + \theta^1(\theta^2)^3]/8$$

$$N^{2(j)} = [1 + \theta^1 - \theta^2 - \theta^1\theta^2 - (\theta^2)^2 - \theta^1(\theta^2)^2 + (\theta^2)^3 + \theta^1(\theta^2)^3]/8$$

$$N^{3(j)} = [1 + \theta^1 - \theta^2 - (\theta^1)^2 - \theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 + (\theta^1)^2\theta^2 + (\theta^1)^3\theta^2]/8$$

$$N^{1(k)} = [2 + 3\theta^1 + 3\theta^2 + 4\theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 - (\theta^2)^3 - (\theta^1)^3\theta^2 - \theta^1(\theta^2)^3]/8$$

$$N^{2(k)} = [-1 - \theta^1 - \theta^2 - \theta^1\theta^2 + (\theta^2)^2 + \theta^1(\theta^2)^2 + (\theta^2)^3 + \theta^1(\theta^2)^3]/8$$

$$N^{3(k)} = [1 + \theta^1 + \theta^2 - (\theta^1)^2 + \theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 - (\theta^1)^2\theta^2 - (\theta^1)^3\theta^2]/8$$

$$N^{1(l)} = [2 - 3\theta^1 + 3\theta^2 - 4\theta^1\theta^2 + (\theta^1)^3 - (\theta^2)^3 + (\theta^1)^3\theta^2 + \theta^1(\theta^2)^3]/8$$

$$N^{2(l)} = [-1 + \theta^1 - \theta^2 + \theta^1\theta^2 + (\theta^2)^2 - \theta^1(\theta^2)^2 + (\theta^2)^3 - \theta^1(\theta^2)^3]/8$$

$$N^{3(l)} = [-1 + \theta^1 - \theta^2 + (\theta^1)^2 + \theta^1\theta^2 - (\theta^1)^3 + (\theta^1)^2\theta^2 - (\theta^1)^3\theta^2]/8$$

(6-181)

$$\text{حيث: } \theta^2 = \frac{x^1}{b}, \quad \theta^1 = \frac{x^1}{b}$$

تشتق الانحناءات من التابع التقريبي للانتقالات (6-180) وفق العلاقات (6-92) فينتج أن :

$$\chi_{ij} = -\frac{1}{2} (N_{,ij}^{r(p)} + N_{,ji}^{r(p)}) u_{r(p)} = -N_{,ij}^{r(p)} u_{r(p)} \quad (6-182)$$

بالتوازي التقريبية (6-182)، (6-180) تأخذ الطاقة الكامنة لحالة بلاطة رقيقة (6-114) الشكل :

$$\begin{aligned} \pi = & \sum_p \left[ \frac{1}{2} u_{r(p)} \left( \int_A N_{,ij}^{r(p)} \cdot E^{ijkl} \cdot N_{,kl}^{s(q)} \cdot dA \right) u_{s(q)} - u_{r(p)} \int_A p^{-3} \cdot N^{r(p)} \cdot dA \right. \\ & \left. - \sum_m \bar{F}^{(m)} \cdot u_{(m)}^* \right] \\ = & \sum_p \left( \frac{1}{2} \cdot u_{r(p)} k^{r(p)s(q)} u_{s(q)} - u_{r(p)} \bar{F}^{r(p)} \right) - \sum_m \bar{F}^m u_{(m)}^* \end{aligned} \quad (6-183)$$

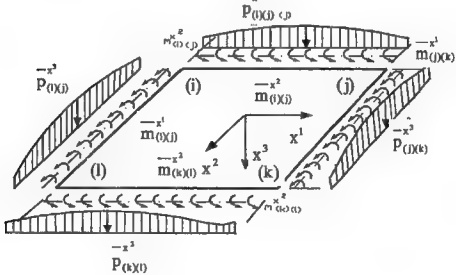
حيث :

$$k^{r(p)s(q)} = \int_A N_{,ij}^{r(p)} \cdot E^{ijkl} \cdot N_{,kl}^{s(q)} \cdot dA \quad (6-184)$$

مصفوفة التساوة لعنصر البلاطة الرقيقة. و :

$$\bar{F}^{r(p)} = \int_A p^{-3} \cdot N^{r(p)} \cdot dA \quad (6-185)$$

الحمولات المركزة على عقد عنصر العناصر الثلاثة رقيقة والمكافئة للحمولة الموزعة.



شكل 6-16: حمولات خارجية على أطراف العنصر المنتهي.

وفي حال وجود حمولات خارجية على أطراف العنصر المنتهي كما هو مبين في الشكل (6-16) يجري الانتقال من مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري لحالة الجسم الفراضي إلى الحالة المستوية لبلاطة رقيقة بشكل مماثل لما ورد عند الانتقال من المعادلة (5-57) إلى المعادلة (5-60) وذلك بعد فرض أن الحمولات الخارجية المطبقة على الأطراف الفاصلة بين عنصرين متتبعين متجاورين يمكن توزيعها بشكل عشوائي أو إلحاقها بأحد العنصرين أو كلاهما. والعمل الخارجي المنجز من قبل هذه القوى:

$$T = - \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_{\Omega_e} \bar{p}_{b,e}^T \cdot u_i^{b,e} \cdot dS \quad (6-186)$$

يجب إضافته إلى قيمة الطاقة الكامنة النهائية.

حيث  $\bar{p}_{b,e}^T$  شعاع القوى الخارجية للوثة على أطراف العنصر المنتهي.  $u_i^{b,e}$  توابع الانتقالات على هذه الأطراف. وتشتق توابع الانتقالات على طرف ما من أطراف العنصر المنتهي بتعويض معادلة هذا الطرف في توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر المنتهي.

تستخدم التوابع التقريبية أيضا لوصف توابع الحمولات الخارجية على أطراف العناصر المنتهية. فعلى سبيل المثال إذا ما تم إعطاء تابع الحمولة  $\bar{p}_{(X,D)}$  على الطرف (i) (j) بثلاث قيم وهي قيمة الحمولة في العقدة (i) وقيمة الحمولة في منتصف الطرف (i) (j) وقيمتها في العقدة (j) ولتكن هذه القيم  $\bar{p}_{(X,D)}^{-1}, \bar{p}_{(X,D)}^{-2}, \bar{p}_{(X,D)}^{-3}$  على التوالي عندها يمكن التعبير التقريبي عن تابع الحمولة  $\bar{p}_{(X,D)}$  بتابع شكل من الدرجة الثانية في  $X^1$  يجري استنتاجه على غرار استنتاج التوابع التقريبية أثناء التعبير عن الانتقالات.

ليكن التابع التقريبي الذي يصف الحمولة من الشكل:

$$\bar{p}_{(X,D)} = [A_1 \quad A_2 \quad A_3] \cdot \begin{bmatrix} \bar{p}_{(X,D)}^{-1} \\ \bar{p}_{(X,D)}^{-2} \\ \bar{p}_{(X,D)}^{-3} \end{bmatrix} = A_k \cdot \bar{p}_{(X,D)}^{-k} \quad (6-187)$$



حيث  $A_k$  تمثل توابع الشكل، وهي تابعة في حالة الحمولات السابقة للإحداثي  $x^1$ .  
على غرار هذا التابع يمكن كتابة التوابع الأخرى للحمولات. نرتب الآن توابع الحمولة الخارجية  
قائبة في شعاع من الشكل:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{b,e} = & \left\{ \vec{p}_{(i)(j)}^{-x^3} \quad \vec{m}_{(i)(j)}^{-x^2} \quad \vec{p}_{(j)(k)}^{-x^3} \quad \vec{m}_{(j)(k)}^{-x^1} \quad \vec{p}_{(k)(i)}^{-x^3} \quad \vec{m}_{(k)(i)}^{-x^2} \quad \vec{p}_{(i)(i)}^{-x^3} \quad \vec{m}_{(i)(i)}^{-x^1} \right\} \\ & = A_k^T \cdot \vec{p}_{b,e}^k \end{aligned} \quad (6-188)$$

$\vec{p}_{b,e}^k$  هي قيم الحمولات الخارجية للمعطة لوصف توابع الحمولات مرتبة وفق التسلسل الوارد  
للشعاع.

نرتب الانتقالات للأطراف في شعاع موافق لتسلسل الحمولات بحيث يعطى الجداء السلمي  
لشعاع الحمولات في شعاع الانتقالات العمل الناتج من الحمولة الخارجية وهذا التسلسل هو:

$$u_i^{b,e} = \left\{ u_{x_3^1}^{(i)(j)} \quad \varphi_{x_1^1}^{(i)(j)} \quad u_{x_3^2}^{(j)(k)} \quad \varphi_{x_2^2}^{(j)(k)} \quad u_{x_3^3}^{(k)(i)} \quad \varphi_{x_1^3}^{(k)(i)} \quad u_{x_3^1}^{(i)(i)} \quad \varphi_{x_2^2}^{(i)(i)} \right\} \quad (6-189)$$

نتج هذه التوابع من توابع الشكل (6-180) بتعويض معادلات الأطراف فيها. وبالنسبة نحصل  
بعد التعويض على الشكل المصغوف التالي:

$$u_i^{b,e} = L_r^{b,e(p)} \cdot u_{j(p)} = L_r^{b,e(q)} \cdot u_{s(q)} \quad (6-190)$$

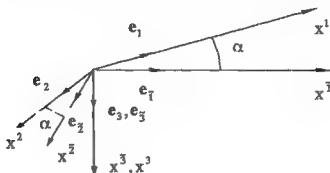
ويصبح العمل الخارجي لهذه الحمولات على مستوى المتغير المنتهي مساوياً لـ:

$$T = \left( - \int_{a_{b,e}^0}^{-k} \vec{p}_{b,e} \cdot A_k^T \cdot L_r^{b,e(q)} \cdot dS \right) u_{s(q)} = - \vec{r}^{(s)(q)} \cdot u_{s(q)} \quad (6-191)$$

يضاف هنا الحد إلى قيمة الطاقة الكامنة الواردة في العلاقة (6-183).

وللتمكن من الجمع على كامل المنشأ يجب كتابة تعابير الطاقة الكامنة بدلالة الانتقالات النسبوية  
إلى جملة المحاور الإحداثية العامة  $(x^1, x^2, x^3)$  أو  $(x_1, x_2, x_3)$  ذات الأشعة الواحدة  
 $(e^1, e^2, e^3)$  أو  $(e_1, e_2, e_3)$ . شعاع الانتقالات في المحاور الإحداثية الخاصة  
للعقدة  $(e^1, e^2, e^3)$  أو  $(x_1, x_2, x_3)$  ذات الأشعة الواحدة  $(e_1, e_2, e_3)$  أو  $(e^1, e^2, e^3)$

ما  $\{u_{x^3}^0, \varphi_{x^1}, \varphi_{x^2}\}$  يقابله شعاع الانتقالات في المحاور الإحداثية العامة  $\{u_{x^3}^0, \varphi_{x^1}, \varphi_{x^2}\}$ . وللتحويل بين الشعاعين يجب إيجاد العلاقة التي تربط بينهما. في الحالة التي لا ينطبق فيها مركز الجملتين نحري انسحابا للمحاور الإحداثية العامة لينطبق مركزها على مركز جملة المحاور الإحداثية الخاصة بشكل مشابه لما ورد في العلاقة (5-44).



شكل(6-17): المحاور الإحداثية العامة والخاصة

يتم التعبير عن انتقالات نقطة ما من العنصر ولتكن النقطة  $p$  بنفس الطريقة التي عبر بها منها في العلاقة (5-46)، وبعد أخذ الحالة الخاصة للبلاطة بعين الاعتبار بملاحظة أن شعاعي الواحدة  $e_3, e_3$  متطابقان وعموديان على الأشعة الواحدية الأخرى. تبسط العلاقة التفصيلية (5-47) التي تربط بين الانتقالات في المحاور الإحداثية الخاصة والانتقالات في المحاور الإحداثية العامة إلى:

$$\begin{bmatrix} u_{x^1(p)} \\ u_{x^2(p)} \\ u_{x^3(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_1 & 0 \\ e_1 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(p)} \\ u_{x^2(p)} \\ u_{x^3(p)} \end{bmatrix} \quad (6-192)$$

بالتعبير عن شعاع المكان في الإحداثيات المختلفة للنقطة  $(p)$  يمكن بشكل مماثل أن نجد:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_1 & 0 \\ e_1 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (6-193)$$

ولنفترض أن النقطة p واقعة على العمود النازل من العقدة (i) على مستوي سطح البلاطة فلا تنتقل  $u_{x^3(p)}$  يمر أيضا عن انتقال العقدة (i) الواقعة على السطح الوسطي للبلاطة كما أن الانتقال  $u_{x^3(p)}$  يمر أيضا عن انتقال العقدة (i) وبالتالي:

$$u_{x^3(i)}^* = u_{x^3(i)}^* \quad (6-194)$$

وتصبح الدورانات حول الإحداثيات الخاصة مكافئة لـ :

$$\begin{aligned} \varphi_{x^1(i)} &= \frac{\partial u_{x^3(i)}^*}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{x^3(i)}^*}{\partial x^{\bar{1}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{x^3(i)}^*}{\partial x^{\bar{2}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^2} \\ &= -e_2 \cdot e^{\bar{1}} \cdot \varphi_{x^{\bar{2}}(i)} + e_2 \cdot e^{\bar{2}} \cdot \varphi_{x^{\bar{1}}(i)} \end{aligned} \quad (6-195)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{x^2(i)} &= -\frac{\partial u_{x^3(i)}^*}{\partial x^1} = -\frac{\partial u_{x^3(i)}^*}{\partial x^{\bar{1}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^1} - \frac{\partial u_{x^3(i)}^*}{\partial x^{\bar{2}}} \cdot \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^1} \\ &= e_1 \cdot e^{\bar{1}} \cdot \varphi_{x^{\bar{2}}(i)} - e_1 \cdot e^{\bar{2}} \cdot \varphi_{x^{\bar{1}}(i)} \end{aligned} \quad (6-196)$$

وذلك باعتبار أن كلا من  $x^1, x^2$  تابعة بمفردها لـ  $x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}$ .

ويمكن للمتابعة بنفس الطريقة لإيجاد دستور التحويل الذي يربط بين موترات التشوهات المنسوب إلى الجملة الإحداثية الخاصة ونظيره المنسوب إلى الجملة الإحداثية العامة وكذلك الأمر بالنسبة لتحويل موترات الإجهادات.

وبتجميع العلاقات (6-194)، (6-195)، (6-196) نحصل على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} u_{x^3(i)}^* \\ \varphi_{x^1(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 \cdot e^{\bar{2}} & -e_2 \cdot e^{\bar{1}} \\ 0 & -e_1 \cdot e^{\bar{2}} & e_1 \cdot e^{\bar{1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^{\bar{3}}(i)}^* \\ \varphi_{x^{\bar{1}}(i)} \\ \varphi_{x^{\bar{2}}(i)} \end{bmatrix} \quad (6-197)$$

$$u_{r(p)} = T_r^{\bar{r}} \cdot u_{\bar{r}(p)} \quad ; \quad u_{s(q)} = T_s^{\bar{s}} \cdot u_{\bar{s}(q)}$$

وهذا التحويل يتم إنجازه بالنسبة لكل عقدة من عقد العنصر المنتهي. وتصبح الطاقة الكامنة (6-183) مساوية لما يلي:

$$\Pi = \sum_q \left( \frac{1}{2} u_{\bar{r}(p)} \cdot T_r^{\bar{r}} \cdot k^{r(p)q(q)} \cdot T_s^{\bar{r}} \cdot u_{\bar{r}(q)} - u_{\bar{r}(p)} \cdot T_r^{\bar{r}} \cdot \bar{f}^{r(p)} \right) - \sum_m u_{\bar{r}(p)} \cdot \bar{f}^{r(p)} \cdot T_r^{\bar{r}} \quad (6-198)$$

$$= \sum_q \left( \frac{1}{2} u_{\bar{r}(p)} \cdot k^{r(p)q(q)} \cdot u_{\bar{r}(q)} - u_{\bar{r}(p)} \cdot \bar{f}^{r(p)} \right) - \sum_m u_{\bar{r}(p)} \cdot \bar{f}^{r(p)}$$

حيث:

$$k^{r(p)q(q)} = T_r^{\bar{r}} \cdot k^{r(p)q(q)} \cdot T_s^{\bar{r}} \quad (6-199)$$

مصنوفة القساوة في الإحداثيات العامة و :

$$\bar{f}^{r(p)} = T_r^{\bar{r}} \cdot \bar{f}^{r(p)} \quad (6-200)$$

شعاع الحمولات الخارجة المكافئة للحمولة الموزعة في الإحداثيات العامة. يمكن الآن الجمع على كامل المنشأ لنحصل على:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot u_{\bar{r}(n)} \cdot k^{r(n)q(n)} \cdot u_{\bar{r}(n)} - \bar{f}^{r(n)} \cdot u_{\bar{r}(n)} ; (n), (n') = 1, 2, \dots \quad (6-201)$$

حيث  $k^{r(n)q(n)}$  مصنوفة القساوة العامة لكامل المنشأ و  $u_{\bar{r}(n)}$  شعاع الانتقالات لكامل عقد المنشأ. وبعد أخذ المتغير الأول للطاقة الكامنة نحصل على جملة المعادلات الخطية لانتقالات العقد :

$$k^{r(n)q(n')} \cdot u_{\bar{r}(n')} - \bar{f}^{r(n)} = 0 \quad (6-202)$$

بعد تعويض الشروط الطرفية للانتقالات في المعادلات السابقة وحلها بالطرق المعروفة والحصول على انتقالات العقد في المحاور الإحداثية العامة، تحول هذه إلى المحاور الإحداثية الخاصة ويجري حساب الجاهيل الستاتيكية والكيميائية من المعادلات الواردة في هذا الفصل وفق الطريقة الاعتيادية.

## 6-5-5- عنصر منتهى مستطيل من النموذج المجهين للإجهادات

كما رأينا يمثل مبدأ الطاقة التمتدة المعدل الأساس النظري للتطبيق المجهين من نموذج الإجهادات . و قبل البدء بتطبيق هذا المبدأ على حالة بلاطة مستوية يجب تبسيط هذا المبدأ من الحالة الفراغية للوسط المستمر المتمثل بالعلاقين (3.78),(3.79) إلى الحالة المستوية للوسط المقسم إلى عناصر منتهية و التي يتم فيها مراعاة الحالة الخاصة التي تمثل الوضعية الإجهادية و وضعية التشوهات لبلاطة مستوية . يتم هذا التبسيط بشكل مماثل لما ورد في الفقرة (5-5). ونحصل بعد هذا التبسيط على العلاقة (5.63) و ذلك باعتبار أن نظرية السطوح الحرة الخالية من الإجهادات سارية المفعول و أن تطبيق القوى الخارجية يمكن اعتباره على السطح الوسطي للبلاطة و لاداعي لإعادة هذا التبسيط من جديد . ويمكن الانتقال مباشرة إلى شرح الخطوط الأساسية لهذا التطبيق كما يمكننا اختصار بعض الشروحات لورودها أثناء تطبيق هذه الطريقة على عنصر إطاري فراغي .

## 6-5-1- خوارزميات الطريقة المجهينة

وجدنا أنه اقتصرنا أثناء معالجة البلاطة الرقيقة على استخدام موتر الإجهادات المحددة في العلاقة (6.77) و موتر التشوهات الموافقة لها المحددة في العلاقة (6.76) . و بناء عليه تختصر العلاقة التي تربط بين الإجهادات و بين التشوهات أو قانون المادة (2.49) للحالة الفراغية في حالة البلاطة الرقيقة إلى العلاقة (6.90) كما أن العلاقة العكسية التي تربط بين موتر التشوهات المختصرة (6.70) و موتر الإجهادات المختصرة (6.77) لحالة البلاطة الرقيقة يمكن استنتاجها من الحالة الفراغية المحددة بالعلاقة (2.50) بعد استبعاد العلاقات الخاصة غير المعتبرة في معالجة البلاطة الرقيقة . و بعد إعادة ترتيب العلاقات الناتجة عن هذا الاستبعاد و مراعاة تناظر موتر الإجهادات و التشوهات للبلاطة الرقيقة نحصل على :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^2x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & & & -\nu \\ & 1+\nu & 1+\nu & \\ & 1+\nu & 1+\nu & \\ -\nu & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x^1x^1} \\ \sigma_{x^2x^1} \\ \sigma_{x^1x^2} \\ \sigma_{x^2x^2} \end{bmatrix} \quad (6.203)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma^{kl}$$

حيث  $S_{ijkl}$  موثرة الليونة لحالة البلاطة الرقيقة. و لتقييم طاقة التشوه الداخلية المتممة

$$\Pi_i^* = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} S_{ijkl} \sigma^{kl} dv \quad (6.204)$$

وجدنا أنه من الأنسب افتراض توابع قوى المقطع بدل من افتراض توابع الإجهادات و ذلك لتغير هذه الأخيرة على ارتفاع المقطع. و لذلك لابد من كتابة الطاقة الداخلية المتممة بدلالة قوى المقطع. لهذا الغرض نصيغ الطاقة الداخلية المتممة بدلالة الانحناءات بتعويض العلاقة (6.94) في العلاقة (6.204) فنحصل على :

$$\begin{aligned} \Pi_i^* &= \frac{1}{2} \int_A \chi_{ij} \left( \int_{-t/2}^{t/2} x^3 c^{ijkl} x^3 dx^3 \right) \chi_{kl} dA \\ &= \frac{1}{2} \frac{t^3}{12} \int_A \chi_{ij} c^{ijkl} \chi_{kl} dA \end{aligned} \quad (6.205)$$

بعد ذلك تصاغ الانحناءات بدلالة قوى المقطع بإيجاد معكوس العلاقة (6.95) والذي يمكن صياغته بالشكل :

$$\chi_{ij} = \frac{12}{t^3} S_{ijkl} m^{kl} \quad (6.206)$$

و ذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار أن  $m^{x^2_1} = m^{x^2_2}$  ;  $x_{x^2_2} = x_{x^2_1}$  أثناء إيجاد معكوس العلاقة المشتقة . و بتعريض العلاقة (6.206) في العلاقة (6.201) و بعد مراعاة أن  $S_{ij}$  يمثل مقلوب  $c_{ij}$  نحصل على :

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \frac{12}{t^3} \int_A m^i S_{ijk} m^k dA \quad (6.207)$$

يخضع اختيار توابع قوى المقطع للضوابط نفسها التي شرحت في الفقرة (5-5-2) و للمرء الحرية في اختيار هذه التوابع بحيث تتحقق للمتطلبات الواردة في الفقرة للنمو عنها والتابع التقريبي التالي :

$$\begin{bmatrix} m^{x^1_1} \\ m^{x^2_1} \\ m^{x^1_2} \\ m^{x^2_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 & (x^1)^2 & x^1 x^2 & (x^2)^2 & -x^1 x^2 \\ 1 & x^1 & x^2 & -x^1 x^2 & \frac{1}{2}(x^1)^2 & \frac{1}{2}(x^2)^2 & -x^1 x^2 \\ 1 & x^1 & x^2 & -x^1 x^2 & \frac{1}{2}(x^1)^2 & \frac{1}{2}(x^2)^2 & -x^1 x^2 \\ 1 & x^1 & x^2 & (x^1)^2 & x^1 x^2 & (x^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \\ \beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} x^1 x^2 \\ -\frac{1}{2} x^1 x^2 \end{bmatrix} \cdot p$$

$$m^i = p^{\alpha} \beta_{\alpha} + p^{\beta} \beta_{\beta}; i, j = x^1, x^2; k = 1, 2; \ell = 1, 2, \dots, 6 \quad (6.208)$$

يحقق المتطلبات السابقة لحالة حولة موزعة بانتظام على مساحة العنصر المنتهي و أهمها معادلة التوازن الداخلية على المستوى التفاضلي .

ينتج الشكل المصفوفي الوارد في العلاقة (6.208) من تجميع قرائن الشكل الموترى في نفس العلاقة . حيث نجمع القريتين  $kl$  في قرينة واحدة مثلاً  $n$  و القريتين (i) (j) في قرينة واحدة (m) و شكل العلاقة السابقة المصفوفي يصبح:  $m^m = P^{mm} \beta_m + \bar{P}^{mm} \bar{\beta}$  . واستخدمت الأقواس للقرائن لتمييز قرائن الأطراف . بالتابع التقريبي السابق لقوى المقطع تأخذ طاقة التشوه الداخلية المتممة الشكل :

$$\begin{aligned} \Pi_1^* &= \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (P^{ijkl} \beta_{kl} + \bar{P}^{ij} \bar{\beta}) S'_{ijmn} (P^{mnop} \beta_{op} + \bar{P}^{mn} \bar{\beta}) dA \\ &= \frac{1}{2} \beta_{kl} \left( \int_{\Lambda} P^{ijkl} S'_{ijmn} P^{mnop} dA \right) \beta_{op} + \frac{1}{2} \beta_{kl} \left( \int_{\Lambda} P^{ijkl} S'_{ijmn} \bar{P}^{mn} dA \right) \bar{\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta_{op} \left( \int_{\Lambda} \bar{P}^{ij} S'_{ijmn} P^{mnop} dA \right) \bar{\beta} + \frac{1}{2} \bar{\beta} \left( \int_{\Lambda} \bar{P}^{ij} S'_{ijmn} \bar{P}^{mn} dA \right) \bar{\beta} \\ &= \frac{1}{2} \beta_{kl} H^{kl op} \beta_{op} + \frac{1}{2} \beta_{kl} \bar{H}^{kl} \bar{\beta} + C_1 \end{aligned} \quad (6.209)$$

حيث:

$$H^{kl op} = \int_{\Lambda} P^{ijkl} S'_{ijmn} P^{mnop} dA \quad (6.210)$$

$$\bar{H}^{kl} = \int_{\Lambda} P^{ijkl} S'_{ijmn} \bar{P}^{mn} dA \bar{\beta} \quad (6.211)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \bar{\beta} \left( \int_{\Lambda} \bar{P}^{ij} S'_{ijmn} \bar{P}^{mn} dA \right) \bar{\beta} \quad (6.212)$$

و القرائن الجديدة المستخدمة تتحول بالشكل  $m, n = x^1, x^2$  و  $o = 1, 2$  و  $p = 1, 2, \dots, 6$

$$S'_{ijmn} \text{ مساوية لـ } \frac{1}{4} S_{ijmn}.$$

يمثل الحد الثاني من الطاقة للمتعة المعدلة (5.63) عمل القوى السطحية الطرفية على أطراف العنصر المنتهي . و تنتج القوى السطحية الطرفية من قوى المقطع ضمن العنصر المنتهي بتعويض



معادلات الأطراف الأربعة للعنصر المنتهي هي  $(i)(j), (k)(l), (j)(k), (i)(l)$  ومعادلتها على التوالي:  $x^1 = -a, x^2 = b, x^1 = a, x^2 = -b$ . بتعميض هذه المعادلات في العلاقة (6.208) نحصل على المنحنيات التي تمثل العزوم على هذه الأطراف. وللحصول على المنحنيات التي تمثل القوى القاصصة على هذه الأطراف تشتق الأخيرة وفق المعادلتين الثانية و الثالثة. للعلاقة (6.85) من معادلات العزوم (6.208) و تعوض معادلات الأطراف في العلاقات الناتجة وبعد اتخاذ هذه الإجراءات نحصل على الشكل المصغور في التالي لقوى المقطع في أطراف العنصر المنتهي :

$$\begin{bmatrix} -q_{(00)}^{x^2} \\ m_{(00)}^{x^1 x^2} \\ q_{(00)}^{x^1} \\ m_{(00)}^{x^1 x^2} \\ q_{(00)}^{x^2} \\ -m_{(00)}^{x^1 x^2} \\ -q_{(00)}^{x^1} \\ -m_{(00)}^{x^1 x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2b & -2x^1 & -x^1 & -x^1 & b^2 \\ & 1 & x^1 & -b & (x^1)^2 & -bx^1 & -bx^1 & b^2 \\ & 1 & 2 & x^2 & 2x^2 & 2x^2 & -2a & \\ & a & x^2 & a^2 & ax^2 & (x^2)^2 & & \\ & 2 & 1 & -2b & 2x^1 & x^1 & x^1 & \\ -1 & & -x^1 & -b & -(x^1)^2 & -bx^1 & -bx^1 & -b^2 \\ & -1 & -2 & -x^2 & -2x^2 & -2x^2 & -2a & \\ -1 & a & x^2 & -a^2 & ax^2 & (x^2)^2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -b \\ -a \\ -b \\ -a \end{bmatrix} \frac{1}{p}; \quad p_{ij}^i = \bar{R}_{ij}^i \beta_{ij}^i + \bar{R}_{ij}^i \beta_{ij}^i$$

(6.213)

يلاحظ الآن أن  $b, a$  استخدمت كقتران تحول على أطراف العنصر المنتهي كما يلي :  $b, a$  ,  $(i)(j), (j)(k), (k)(l), (l)(i)$  و يلاحظ أيضا أن العلاقة السابقة تحتوي على مقادير تحول

قراءتها على  $x^1, x^2$  و هي عزوم المقطع وأخرى تتحول قراءتها إما على  $x^1$  أو على  $x^2$  وهي قوى القص في المقطع. في الحالة العامة يكون من الأسلم فصل هذه العلاقة إلى علاقتين تحتوي إحداها على عزوم المقطع بمفردها وأخرى تحتوي على القوى القاصة في المقطع وذلك لنائفي الالتباس أثناء التحويل من جملة إحداثيات الديكارتية يمكن أن نعتبر أن القرينة  $i$  تتحول بالشكل  $i \approx 1; 2$  أما بقية القرائن فتتحول كما في العلاقة (6.208) ويكون عدد عناصر  $p^i_m$  مساوياً ل  $4*2=8$  وعدد عناصر المصفوفة  $R^{kl}_m$  مساوياً ل  $4*2*2*6=96$  أما الانتقالات على أطراف العنصر المنتهي والتي يمكن افتراضها بشكل مستقل , وللوافق لشعاع قوى المقطع الطرفية , فسنفترض أنه يمكن تقريبها بالتتابع التالية :

$$\begin{bmatrix} u^{(00)}_1 \\ u^{(00)}_2 \\ u^{(00)}_3 \\ u^{(00)}_4 \\ u^{(00)}_5 \\ u^{(00)}_6 \\ u^{(00)}_7 \\ u^{(00)}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^1_1 & -ah^1_2 & h^1_3 & -ah^1_4 & & & & \\ & \frac{1}{2}(1-\theta^1) & & \frac{1}{2}(1+\theta^1) & & & & \\ & & h^2_1 & bh^2_2 & & & & \\ & & & \frac{1}{2}(1-\theta^2) & h^3_3 & bh^3_4 & & \\ & & & & \frac{1}{2}(1-\theta^3) & & \frac{1}{2}(1+\theta^3) & \\ & & & & h^4_1 & -ah^4_2 & h^4_3 & -ah^4_4 \\ & & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^4) & \frac{1}{2}(1-\theta^4) & \\ & h^5_1 & -bh^5_2 & & & & h^5_3 & -bh^5_4 \\ & & & \frac{1}{2}(1-\theta^5) & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(0)}_{13} \\ \varphi_{13}(0) \\ u^{(0)}_{23} \\ \varphi_{23}(0) \\ u^{(0)}_{33} \\ \varphi_{33}(0) \\ u^{(0)}_{43} \\ \varphi_{43}(0) \\ u^{(0)}_{53} \\ \varphi_{53}(k) \\ u^{(0)}_{63} \\ \varphi_{63}(k) \\ u^{(0)}_{73} \\ \varphi_{73}(0) \\ u^{(0)}_{83} \\ \varphi_{83}(0) \end{bmatrix}$$

$$u^{b,e}_i = L^{b,e,m(a)}_{i \quad m(a)} u_{m(a)}; m = 1,2,3 \quad (n) = (i),(j),(k),,(l) \quad (6.214)$$

حيث :

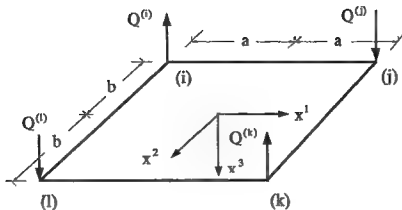
$$\begin{aligned}
h_1^1 &= \frac{1}{4}(2 - 3\theta^1 + (\theta^1)^3); h_3^1 = \frac{1}{4}(2 + 3\theta^1 - (\theta^1)^3) \\
h_2^1 &= \frac{1}{4}(1 - \theta^1 - (\theta^1)^2 + (\theta^1)^3); h_4^1 = \frac{1}{4}(-1 - \theta^1 + (\theta^1)^2 + (\theta^1)^3) \\
h_1^2 &= \frac{1}{4}(2 - 3\theta^2 + (\theta^2)^3); h_3^2 = \frac{1}{4}(2 + 3\theta^2 - (\theta^2)^3) \\
h_2^2 &= \frac{1}{4}(1 - \theta^2 - (\theta^2)^2 + (\theta^2)^3); h_4^2 = \frac{1}{4}(-1 - \theta^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^2)^3) \\
\theta^1 &= \frac{x^1}{a} \quad ; \quad \theta^2 = \frac{x^2}{b}
\end{aligned} \tag{6.215}$$

لاستخراج هذه التوابع استخدمت على كل طرف من أطراف البلاطة نفس الطريقة التي استخدمت لاستخراج توابع الانتقالات التقريبية في عنصر منتهي لإطار فراغي . مع ملاحظة أن مركز المحاور الاحداثية منطبق على منتصف العنصر . و بالاستعانة بالعلاقين (6.213),(6.214) يقيم الحد الثاني من العلاقة (5.63) بالشكل :

$$\begin{aligned}
T_1' &= \int_{\Omega} p_{b,e}^i u_i^{b,e} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} (R_{b,e}^{(s)} \beta_{(s)} + \bar{R}_{b,e}^{(s)} \bar{\beta}) L_i^{b,sm(s)} u_{m(s)} ds
\end{aligned} \tag{6.216}$$

بقي لايجاد قيمة الحد الثاني النهائية اعتبار عمل القوى الركنية  $2m^{1/2}$  الممثلة في الشكل 6-18. تحسب هذه القوى من التابع التقريبي للعزوم (6.208) بتعويض احداثيات عقد العنصر المنتهي في هذه الأخيرة . بعد هذا التعويض نحصل على العلاقات التالية للقوى الركنية :

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= -2\beta_2 - 2a\beta_3 - 2b\beta_6 + 2ab\beta_8 - a^2\beta_9 - b^2\beta_{11} + 2ab\beta_{12} + ab\bar{p}^3 \\
Q^{(1)} &= 2\beta_2 + 2a\beta_3 - 2b\beta_6 + 2ab\beta_8 - a^2\beta_9 - b^2\beta_{11} + 2ab\beta_{12} + ab\bar{p}^3 \\
Q^{(2)} &= -2\beta_2 - 2a\beta_3 - 2b\beta_6 + 2ab\beta_8 - a^2\beta_9 - b^2\beta_{11} + 2ab\beta_{12} + ab\bar{p}^3 \\
Q^{(2)} &= 2\beta_2 - 2a\beta_3 + 2b\beta_6 + 2ab\beta_8 + a^2\beta_9 + b^2\beta_{11} + 2ab\beta_{12} + ab\bar{p}^3
\end{aligned} \tag{6.217}$$



شكل 6-18: القوى المركبة على زوايا العنصر المنتهي

و العمل الذي تنجزه هذه القوى يساوي إلى مقادير هذه القوى السواردة في العلاقة السابقة مضروباً بانتقالات العقد الموافقة في اتجاه المحور  $x^3$ .

$$T_2' = Q^{m(n)} u_{m(n)} + \bar{Q}^{m(n)} u_{m(n)} \quad (6.218)$$

حيث :

$$Q^{m(n)} = \{Q^{(i)} 00 Q^{(j)} 00 Q^{(k)} 00 Q^{(l)} 00\} \quad (6.219)$$

$$\bar{Q}^{m(n)} = \{abp^{-3} 00 abp^{-3} 00 abp^{-3} 00 abp^{-3} 00\}$$

و تصبح قيمة الحد الثاني مساوية لـ :

$$T = T_1' + T_2' = \beta_{kz} T^{klm(n)} u_{m(n)} + \bar{\beta} T^{m(n)} u_{m(n)} \quad (6.220)$$

حيث :

$$T^{km(n)} = \int_s R_{b,e}^{ikl} L_i^{b,em(n)} dS + \frac{\partial}{\partial \beta_{kl}} Q^{m(n)} \quad (6.221)$$

$$\bar{T}^{m(n)} = \int_{\bar{s}} \bar{R}_{b,e}^{-i} L_i^{b,em(n)} d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}} \bar{Q}^{m(n)} \quad (6.222)$$

وذلك لأن:

$$\beta_{kl} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta_{kl}} Q^{m(n)} \right] = Q^{m(n)} \quad (6.223)$$

$$\bar{\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}} \bar{Q}^{m(n)} \right] = \bar{Q}^{m(n)} \quad (6.224)$$

أثناء جمع  $T_2'$  إلى  $T_1'$  ثم استبدال  $Q^{m(n)}$  في العلاقة (6.218) بمكافئاتها من العلاقات (6.223)، (6.224).

يتم تقييم الحد الثالث للطاقة المعدلة في العلاقة (5.63) بشكل مماثل للطريقة التي تم شرحها آنساء  
تقييم الحد لمتعلق بالحمولات الطرفية على أطراف عنصر البلاطة الرقيقة شكل (6-16) و السبي  
وردت في العلاقات (6.187) و حتى (6.191) مع الفارق أن التوابع التقريبية على أطراف  
العنصر المنتهي نموذج الإجهادات يتم اختيارها بشكل مستقل عن التوابع التقريبية الأخرى .

نفرض أن التوابع التقريبية للانتقالات على أطراف العنصر المنتهي ممثلة بالعلاقات (6.214) و أن  
وصف تابع الحمولة يتم بشكل مماثل لما ورد في العلاقة (6.187) أي تابع من الدرجة الثانية في  
إحداثي الطرف . لحالة مثل هذا الوصف نأخذ التوابع التقريبية مثلا للطرف (i) الشكل  
المفصل التالي :

$$A_1 = -\frac{1}{2}\theta^1 + \frac{1}{2}(\theta^1)^2; A_2 = 1 - (\theta^1)^2; A_3 = \frac{1}{2}\theta^1 + \frac{1}{2}(\theta^1)^2 \quad (6.225)$$

و يمكن استنتاجها بسهولة لبقية الأطراف .

و يصبح الحد الثالث من الطاقة المتزمة المعدلة بعد استخدام التوابع التقريبية المذكورة مكافئاً لـ :

$$T = \int_{S_{b,e}^a} \bar{p}_{b,e}^{-1} u_i^{b,e} dS = \bar{p}_{b,e}^{-k} \int_{S_{b,e}^a} A_k^l L_i^{b,em(n)} u_{m(n)} dS = \bar{S}^{m(n)} u_{m(n)} \quad (6.226)$$

حيث :

$$\bar{S}^m = \bar{p}_{b,e}^{-k} \int_{S_{b,e}^a} A_k^l L_i^{b,em(n)} dS \quad (6.227)$$

شعاع الحمولات الخارجية المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة على أطراف العنصر المنتهي . و بهذا تصبح الطاقة المتزمة المعدلة :

$$\begin{aligned} \Pi_{ch} = & \frac{1}{2} \beta_H H^{top} \beta_{op} + \frac{1}{2} \beta_H \bar{H}^{bl} \bar{\beta} + c_1 \\ & - \beta_H T^{Hm(n)} u_{m(n)} - \bar{\beta} T^{m(n)} u_{m(n)} + \bar{S}^{m(n)} u_{m(n)} \end{aligned} \quad (6.228)$$

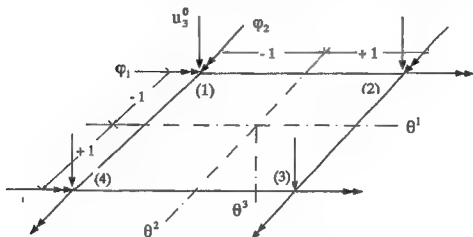
و هذا الشكل مكافئ لما هو وارد في العلاقة (5.86) و ذلك بعد ضم كل من القريتين  $k, l$  والقرينتين  $o, p$  قرينة واحدة . يتم اتباع نفس الأسلوب الوارد في العلاقات من (5.86) و حتى (5.98) للحصول على جملة المعادلات الخطية النهائية للبلالة الرقيقة و المعادلات الناتجة أثناء هذا الانتقال مماثلة لتلك المشتقة في العلاقات الأخيرة المذكورة مع اختلاف في أبعاد المصفوفات المستخدمة.

## 6-6-6- عنصر منتهي- نموذج الانتقالات بتوابع تقريبية

### متعلقة بالحمولات في الإحداثيات الطبيعية

بعد عرض عنصرين منتهيين من نموذج الانتقالات والنموذج المجهن للإجهادات في الإحداثيات الديكارتية تنتقل إلى عرض النموذج المقترح بتوابع انتقالات متعلقة بالحمولة في الإحداثيات الطبيعية . وسوف نقتصر في عرضنا على عنصر منته مستطيل يحمل بحمولة موزعة بانتظام شديداً  $\bar{p}^{-3}$  على واحدة السطح وسوف يراعى في إنجاز هذه الدراسة العمومية في التطبيق بحيث إذا ما

أراد المرء تطبيق مثل هذه الدراسة على عنصر شبه منحرف والمثل للحالة العامة لوجد المفاهيم الضرورية لذلك والتي يمكن أن تساعد في إنجاز دراسته . ليكن لدينا العنصر المنتهي المستطيل المبين في الشكل (6-19) والنسب إلى جملة الإحداثيات الطبيعية  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  ولكن الإحداثيات الديكارتية لرؤوسه:  $(1)(-a, -b)$ ;  $(2)(a, -b)$ ;  $(3)(a, b)$ ;  $(4)(-a, b)$  والطبيعية:  $(1)(-1, -1)$ ,  $(2)(1, -1)$ ,  $(3)(1, 1)$ ,  $(4)(-1, 1)$  على التوالي .



شكل 6-19: عنصر منتهي مستطيل لبلاطة ، المحاور الإحداثية الطبيعية، درجات الحرية

في البدء نحسب الخواص الهندسية التفاضلية للعنصر وفق العلاقات الواردة في الفقرة 6-1. تبين هذه الحسابات أن حالة العنصر المستطيل ثابتة في كل نقطة من نقاطه ويكتفي بحسابها في نقطة واحدة، وبينما تختلف هذه الخواص من نقطة إلى أخرى في الحالة العامة) مثلاً حالة عنصر بشكل شبه منحرف) وحالة العنصر المستطيل المعطى تكون هذه الخواص كالتالي :

$$g_1 = ae_1$$

$$g_2 = be_2$$

$$g_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} (a)^2 & 0 \\ 0 & (b)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{g} = ab$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(b)^2} \end{pmatrix}$$

$$g^1 = \frac{1}{a} e^1$$

$$g^2 = \frac{1}{b} e^2$$

$$g_{1,1} = g_{1,2} = g_{2,1} = g_{2,2} = 0$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$$

(6.229)

يلاحظ أيضا أن كل رموز كريستوفل معلومة لحالة العنصر المستطيل بينما تكون قيمها في الحالة العامة (حالة شبة المنحرف مثلاً) مغايرة للصفر .

يفترض الآن التابع التقريبي للانتقالات  $u_3^0$  في الإحداثيات الطبيعية على الشكل التالي :

$$\begin{aligned} u_3^0 &= c_0 + c_1\theta^1 + c_2\theta^2 + c_3(\theta^1)^2 + c_4\theta^1\theta^2 + c_5(\theta^2)^2 \\ &+ c_6(\theta^1)^3 + c_7(\theta^1)^2\theta^2 + c_8\theta^1(\theta^2)^2 + c_9(\theta^2)^3 + c_{10}(\theta^1)^3\theta^2 \\ &+ c_{11}\theta^1(\theta^2)^3 + c_{12}(\theta^1)^2(\theta^2)^2 = c_\alpha \theta^\alpha \end{aligned}$$

(6.230)

خلافًا للمعادن يحتوي التابع التقريبي السابق على عدد من الحدود أكبر من العدد المعتاد والممثل بعدد من العقد مضروباً بعدد درجات الحرية للعقدة الواحدة . و الحدود التي تزيد عن العدد السابق مخصصة لاحتواء المؤثرات الخارجية . و هذه الحدود ممثلة في التابع التقريبي السابق بالحد الثالث عشر المضاف على التابع المعروف في المصادر العلمية . و باعتبار أن رموز كريستوفل معلومة في حالة العنصر المستطيل ، مما يترتب على ذلك تماثل المشتق الأساسي و المشتق العادي فإن اشتقاق التابع التقريبي (6.230) وفق المعادلة التفاضلية (6.167) يؤدي عندما نريد تحقيقها إلى :

$$2.4.kg_1^1g_j^2g_k^2g_l^1\delta_j^k\delta_l^1c_{12} = \bar{p}^3 \quad (6.231)$$

و ذلك باعتبار أن  $(u_{3,1221}^0 = u_{3,2112}^0)$  و أن  $(u_{3,1111}^0 = u_{3,2222}^0 = 0)$ .



و بعد نشر جداء مركبات أشعة القاعدة الأساسية في التركيب (6.231) و تعويض مركباتنا من المعادلتين الأولى و الثانية للعلاقة (6.229) نجد أن :

$$8ka^2b^2c_{12} = \bar{p}^{-3}; c_{12} = \frac{\bar{p}^{-3}}{8ka^2b^2} \quad (6.232)$$

و بعد تعيين الثابت الفائق  $c_{12}$  ينقسم التابع التقريبي  $u_3^0$  إلى جزء متجانس يجري على التوابست من  $c_0$  إلى  $c_{11}$  و جزء آخر غير متجانس يتضمن الحمولة الخارجية في مستوى العنصر بالشكل :

$$\begin{aligned} u_3^0 = & c_0 + c_1\theta^1 + c_2\theta^2 + c_3(\theta^1)^2 + c_4\theta^1\theta^2 + c_5(\theta^2)^2 \\ & + c_6(\theta^1)^3 + c_7(\theta^1)^2 + c_8\theta^1(\theta^2)^2 + c_9(\theta^2)^3 + c_{10}(\theta^1)^3\theta^2 \\ & + c_{11}\theta^1(\theta^2)^3 + \frac{\bar{p}^{-3}}{8ka^2b^2}(\theta^1)^2(\theta^2)^2 \\ & = \theta^{n'}c_{n'} + \bar{\theta}p^3 \quad ; \quad \bar{\theta} = \frac{\bar{p}^{-3}}{8ka^2b^2}(\theta^1)^2(\theta^2)^2 \quad n' = 0,1,2,\dots,11 \end{aligned} \quad (6.233)$$

و الآن تكفي المعادلات الناتجة عن تعويض إحدائيات العقد (4),(3),(2),(1) في العلاقة (6.233) و مشتقاتها بالنسبة للإحداثي  $\theta^2$  (الممثل للدوران  $\varphi_1$ ) و بالنسبة للإحداثي  $\theta^1$  (الممثل للدوران  $\varphi_2$ ) لتعيين الثوابت الإثني عشر المتبقية . و إحدائيات العقد المقصد للقصودة هي الإحدائيات الطبيعية و ليس الديكارتية ، لأن التوابع للمختارة هي في الإحدائيات الطبيعية . و بعد التعويض نحصل على جملة معادلات خطية مؤلفة من اثني عشر معادلة على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} u_3^* \\ \varphi_{1(1)} \\ \varphi_2(1) \\ u_3^*(2) \\ \varphi_1(2) \\ \varphi_2(2) \\ u_3^*(3) \\ \varphi_1(3) \\ \varphi_2(3) \\ u_3^*(4) \\ \varphi_1(4) \\ \varphi_2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & -1 & -2 & & 1 & 3 & 3 & -1 & -3 \\ & -1 & & 2 & 1 & & -3 & -2 & 1 & & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ & & 1 & & 1 & -2 & & 1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ & -1 & & -2 & 1 & & -3 & 2 & 1 & & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & 1 & 2 & & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ & -1 & & -2 & -1 & & -3 & -2 & -1 & & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ & & 1 & & -1 & 2 & & 1 & -3 & 3 & -1 & -3 \\ & -1 & & 2 & -1 & & -3 & 2 & -1 & & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{-3}{8ka^2b^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u_{p(p)}^* = A_{p(p)}^{a'} c_{a'} + \bar{A}_{p(p)}^{-3} \bar{p}^{-3}; \rho = 1, 2, 3; (p) = (1), (2), (3), (4) \quad (6.235)$$

بما هي هي الثوابت الاختيارية  $c_{a'}$  ،  $u_{p(p)}^*$  هي انتقالات ودورانات عقد العنصر . ينقل الحشد الثاني من الطرف الثاني للعلاقة السابقة إلى الطرف الأول نحصل على :

$$A_{p(p)}^* c_{a'} = u_{p(p)}^* - \bar{A}_{p(p)} \bar{p}^{-3} \quad (6.235)$$

ويُيجاد مقلوب المصفوفة  $A_{p(p)}^*$  يمكن تعيين الثوابت الاختيارية وهي مساوية لما يلي:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3(1)}^* \\ \Psi_{1(1)} \\ \Psi_{2(1)} \\ u_{3(2)}^* \\ \Psi_{1(2)} \\ \Psi_{2(2)} \\ u_{3(3)}^* \\ \Psi_{1(3)} \\ \Psi_{2(3)} \\ u_{3(4)}^* \\ \Psi_{1(4)} \\ \Psi_{2(4)} \end{bmatrix} - \frac{\bar{p}^{-3}}{8ka^2b^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c_{a'} = B_{a'(p)}^p (u_{p(p)}^* - \bar{A}_{p(p)} \bar{p}^{-3}) \quad (6.236)$$

بتعويض الثوابت الاختيارية من العلاقة في (6.227) نحصل على توابع الشكل والمؤلفة الآن من جزء متجانس مرتبط بانتقالات العقد وجزء غير متجانس مرتبط بالحمولة الخارجية الموزعة على العنصر وذلك كما يلي :

$$u_3^* = \theta^a B_{a'(p)}^p u_{p(p)}^* - \theta^a B_{a'(p)}^p \bar{A}_{p(p)} \bar{p}^{-3} + \bar{\theta} \bar{p}^{-3} = N^{p(p)} u_{p(p)}^* + \bar{N} \bar{p}^{-3} \quad (6.237)$$

وتوابع الشكل  $N^{p(p)}$  مكافئة تماماً لـ  $N^{K(p)}$  في العلاقة (6.180) والمطاة تفصيلياً في العلاقة (6,181) وأما  $\bar{N}$  فتعطى بالعلاقة :

$$\bar{N} = \frac{1}{8Ka^2b^2} (1 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 + (\theta^1)^2 (\theta^2)^2) \quad (6.238)$$

بمذه التوابع يجب تقييم تعبير الطاقة الكامنة (6.175). وباعتبار أن كل رموز كريستوفل معلومة مما ينتج عنه تكافؤ المشتق الأساسي  $u_3^*|_{\theta\theta}$  و المشتق العادي  $u_{3\theta\theta}$  ، وبالتالي يمكن اشتقاق مؤثرة الانحناءات (6.153) من العلاقة (6.237) بالشكل :

$$\chi_{\alpha\beta} = -(N^{\rho(p)}_{,\alpha\beta} u^*_{\rho(p)} + \bar{N}_{,\alpha\beta} \bar{p}^{-3}) \quad (6.239)$$

و بهذا يصبح تعبير الطاقة الكامنة كما يلي :

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_q \left[ \frac{1}{2} u^*_{\rho(p)} \left( \int_{\Lambda} N^{\rho(p)}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\eta(q)}_{,\gamma\delta} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \right) u^*_{\eta(q)} \right. \\ & + u^*_{\rho(p)} \left( \int_{\Lambda} N^{\rho(p)}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{N}_{,\gamma\delta} \bar{p}^{-3} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \int_{\Lambda} \bar{p}^{-3} \bar{N}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{N}_{,\gamma\delta} \bar{p}^{-3} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \right) \\ & - u^*_{\rho(p)} \left( \int_{\Lambda} N^{\rho(p)} \bar{p}^{-3} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \right) - \int_{\Lambda} \bar{N} \bar{p}^{-3} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \\ & - \sum_m \bar{F}^{\rho(p)} u^*_{\rho(p)} ; \quad \eta = 1, 2, 3; q = (1), (2), (3), (4) \\ & = \sum_q \left( \frac{1}{2} u^*_{\rho(p)} k^{\rho(p)\eta(q)} u^*_{\eta(q)} - u^*_{\rho(p)} \bar{F}_1^{\rho(p)} + u^*_{\rho(p)} \bar{F}_2^{\rho(p)} + c \right) - \sum_m \bar{F}^{\rho(p)} u^*_{\rho(p)} \end{aligned} \quad (6.240)$$

حيث :

$$k^{\rho(p)\eta(q)} = \int_{\Lambda} N^{\rho(p)}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\eta(q)}_{,\gamma\delta} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \quad (6.241)$$

$$\bar{F}_1^{\rho(p)} = \int_{\Lambda} N^{\rho(p)} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \quad (6.242)$$

$$\bar{F}_2^{\rho(p)} = \int_{\Lambda} N^{\rho(p)}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{N}_{,\gamma\delta} \bar{p}^{-3} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \quad (6.243)$$

$$c = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \bar{p}^{-3} \bar{N}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{N}_{,\gamma\delta} \bar{p}^{-3} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 - \int_{\Lambda} \bar{N} (\bar{p}^{-3})^2 \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \quad (6.243)$$

يلاحظ أثناء الانتقال من العلاقة (6.175) إلى العلاقة (6.240) من أنه بالرغم من أن الحمولات مركزة على بعض عقد البلاطة فقد تم تنضيد شعاع الانتقال  $u^*_m$  لبعض عقد البلاطة في شعاع الانتقال لكامل عقد البلاطة . قبل تجميع العلاقة (6.240) على كامل عناصر البلاطة يجب نسب الطاقة الكامنة الواردة في العلاقة السابقة بالنسبة للإحداثيات الطبيعية إلى الإحداثيات الديكارتية الخاصة بالعنصر ومن ثم نسبها إلى الإحداثيات الديكارتية العامة لكامل المنشأ . و الخطوة الأخيرة كانت قد نوقشت في الفقرة السابقة و تنجز كما هو وارد في العلاقة (6.197) أما بالنسبة

للتحويل من الإحداثيات الطبيعية إلى الإحداثيات الديكارتية الخاصة بالعنصر فيستنتج بالتعبير عن شعاع انتقالات العقدة في الإحداثيات الطبيعية بدلالة مثيله في الإحداثيات الديكارتية و الشروط التالية تقود إلى مثل هذا التعبير . باعتبار أن المحورين الإحداثيين  $x^3, \theta^3$  متطابقان فالانتقال وفق المحور  $\theta^3$  لعقدة ما (p) مكافئ تماماً لانتقال هذه العقدة وفق المحور  $x^3$  أي :

$$u_{3(p)}^* = u_{x^3(p)}^* \quad (6.245)$$

أما الدورانات كمشتملات للانتقالات فيتم تحويلها وفق علاقة التحويل التالية :

$$u_{3,\alpha}^* = g_{\alpha}^i u_{x^3,i}^* \quad (6.246)$$

و عليه يكون :

$$u_{3,1}^* = g_{1,1}^i u_{x^3,x^1}^* + g_{1,2}^i u_{x^3,x^2}^* \quad (6.247)$$

$$u_{3,2}^* = g_{2,1}^i u_{x^3,x^1}^* + g_{2,2}^i u_{x^3,x^2}^*$$

و بالاستعانة بالعلاقات (6.73)، (6.116) و تعويض مركبات أشعة القواعد الأساسية من (6.229) نجد أن :

$$-\varphi_2 = a(-\varphi_{x^3}) \quad (6.248)$$

$$\varphi_1 = b\varphi_{x^1}$$

و العلاقات (6.245)، (6.248) يمكن ترتيبها بالشكل المصفوفي التالي :

$$\begin{bmatrix} u_{3(p)}^* \\ \varphi_{1(p)} \\ \varphi_{2(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3}^* \\ \varphi_{x^1(p)} \\ \varphi_{x^2(p)} \end{bmatrix}; u_{(p)}^* = T_{(p)}^{(i)} u_{(i)}^* \quad (6.249)$$

و بعد ترتيبها لكامل عقد العنصر كالتالي :

$$u_{p(p)}^* = T_{p(p)}^{(i)} u_{i(i)}^*; i = x^1, x^2, x^3; (i) = (1), (2), (3), (4) \quad (6.250)$$

والمصفوفة  $T_{p(p)}^{(i)}$  هي مصفوفة أبعادها (12\*12) ، كل عناصرها أصغراً ما عدداً قطرها الرئيسي الذي يحتوي على العناصر  $a, b, 1$  مكررة أربع مرات على التوالي . بتعويض العلاقة (6.240) في (6.250) نحصل على الطاقة الكامنة منسوبة إلى جملة المحاور الإحداثية الخاصة :

$$\begin{aligned}
\pi &= \sum_p \left[ \frac{1}{2} \left( u_{i(l)}^* T_{p(p)}^{l(l)} K^{p(p)\eta(q)} T_{\eta(q)}^{m(l)} u_{m(l)}^* \right) - u_{i(l)}^* T_{c(p)}^{l(l)} \bar{f}_1^{p(p)} \right. \\
&+ u_{i(l)}^* T_{p(p)}^{l(l)} \bar{f}_2^{p(p)} + c \left. \right] - \sum_p u_{i(l)}^* T_{p(p)}^{l(l)} \bar{f}^{p(p)} \\
&= \sum_p \left[ \frac{1}{2} \left( u_{i(l)}^* K^{l(l)m(l)} u_{m(l)}^* \right) - u_{i(l)}^* \bar{f}_2^{l(l)} + c \right] - \sum_p u_{i(l)}^* \bar{f}^{l(l)}
\end{aligned} \quad (6.251)$$

حيث نحسب مصفوفة التماسرة وأشعة الحملولة عולה إلى الإحداثيات الديكارتية الخاصة وفنق العلاقات:

$$K^{l(l)m(l)} = T_{p(p)}^{l(l)} K^{p(p)\eta(q)} T_{\eta(q)}^{m(l)} \quad (6.252)$$

$$\bar{f}_1^{l(l)} = T_{p(p)}^{l(l)} \bar{f}_1^{p(p)} \quad (6.253)$$

$$\bar{f}_2^{l(l)} = T_{p(p)}^{l(l)} \bar{f}_2^{p(p)} \quad (6.254)$$

$$\bar{f}^{l(l)} = T_{p(p)}^{l(l)} \bar{f}^{p(p)} \quad (6.255)$$

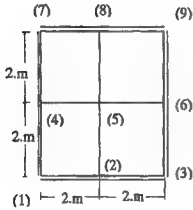
بعد تحويل العلاقة (6.251) ونسبها إلى جملة المحاور الإحداثية العامة والجمع على كامل عناصر المنشأ وأخذ المتغير الأول للطاقة الكامنة الناتجة نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية :

$$K^{T(n)B(n)} u_{B(n)} - \bar{f}^{T(n)} = 0 \quad (6.256)$$

يجب التنويه هنا إلى أنه بعد حساب الجاهيل أو انتقالات العقد في المحاور الإحداثية العامة بنتيجة حل المعادلات (6.256) يجب تحويل هذه الانتقالات في البدء إلى جملة المحاور الإحداثية الخاصة ومن ثم تحول إلى جملة المحاور الإحداثية الطبيعية للحصول على الانتقالات في الإحداثيات الطبيعية . عندها يمكن استخدام علاقات نظرية المرونة في الإحداثيات الطبيعية لحساب بقية الجاهيل الحركية والاستاتيكية وتحول بدورها وفق علاقات التحويل الخاصة بما ثانية إلى جملة المحاور الإحداثية الديكارتية . قد يبدو مثل هذا الطريق شاق طويلاً للمبتدئ ولا تتضح فائدته من تطبيقه على عناصر هندسية بأشكال منتظمة ، و تتضح هذه الفائدة أكثر بعد التعرض لعناصر منتهية بطبولوجية معقدة كالعناصر شبه المنحرفة وعناصر منتهية بأطراف منحنية . عندها سيبدو استخدام الإحداثيات الديكارتية شاقاً ومعقداً إن لم يكن مستحيلاً . وفيما يلي ستعطى نتائج الاختبار العددي لحالة بلاطة مربعة مستتدة استناداً بسيطاً من جميع أطرافها ومحملة بحمولة موزعة بانتظام على كامل مساحتها وتملك الخواص الهندسية الواردة في الشكل 6-20 . وقد اختبرت هذه

البلاطة لأنها تملك حلاً تحليلياً دقيقاً تمثل إلى جانب حلول تقريبية بعناصر منتهية معروفة في المصادر العلمية في الأشكال من 6-21 إلى 6-26 وهذه العناصر المنتهية المساقة للمقارنة العددية هي العنصر الشهير بـ DKT و عنصر آخر شهير بـ ACM . أما نتائج العنصر المقترح في الفقرة 6-6 فقد أدرجت تحت اسم العنصر DE و بين الشكل 6-21 قيم الطاقة الكامنة لكلمل البلاطة بدلالة الشبكة المقسمة لها إلى عناصر منتهية. وقد أنشئ الخط البياني لقيم الطاقة الكامنة من أجل شبكات من العناصر المنتهية قوامها  $2 \times 2$  عنصراً و حتى  $16 \times 16$  عنصراً. و هذه الشبكات مستخدمة أيضاً لتمثيل القيم الأخرى من انتقالات و عزوم انعطاف و قوى قاصة ممثلة في الأشكال 6-22 حتى 6-26 يلاحظ أن العنصر (DE) يمثل تحسناً نوعياً للطاقة الكامنة و يقيم التأثير الأخرى كما أن تقارب حله إلى الحل الدقيق أسرع بكثير من الحلول التقريبية الأخرى . و بالتالي فحساسيته بالنسبة إلى التقسيم الشبكي قليلة و يمكن الحصول به على نتائج مقبولة هندسياً دون الحاجة إلى تقسيم المنشأ تقسيماً شبكياً دقيقاً .

$x^1$



$$E = 1.82 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

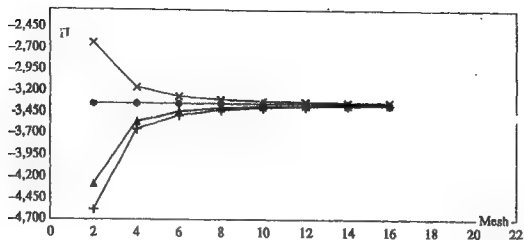
$$t = 0.1 \text{ m}$$

$$\nu = 0.3$$

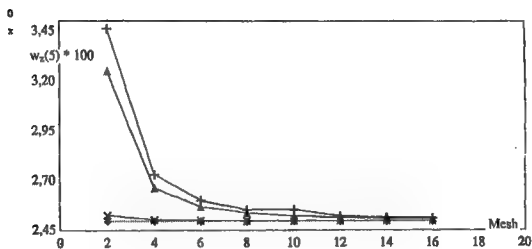
$$\bar{p}^{x^3} = 40. \text{ kN/m}^2$$

$x^2$

شكل 6-20: بلاطة مستندة استناداً بسيطاً من جميع أطرافها وعملة بحمولة موزعة بانتظام الخواص الهندسية.

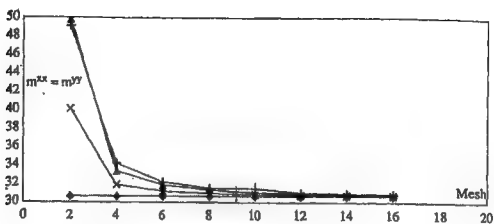


شكل 6-21: الطاقة الكامنة



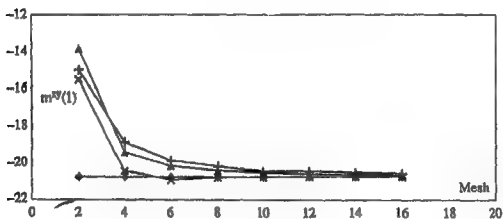
شكل 6-22: انتقالات نقطة منتصف البلاطة  $u_{x,3}^0(5)$





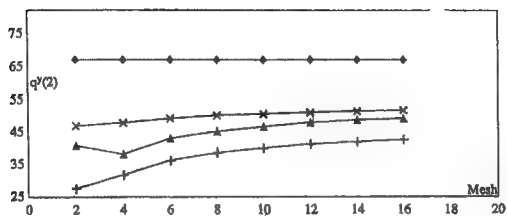
شكل 6-23 : عزوم الانعطاف  $m^{x^1x^1}(5) = m^{x^2x^2}(5)$

$$m^{x^1x^2} = m^{x^2x^1}$$



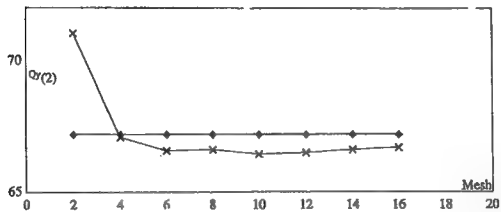
شكل 6-24 : عزوم القتل  $m^{x^1x^2} = m^{x^2x^1}$

$q^{x^2}(2)$



شكل 6-25 : القوة التقاسية  $q^{x^2}(2)$

$O^{x^2}(2)$



شكل 6-26 : قوة القس البديلة (قوة قس كيرشهوف)  $O^{x^2}(2)$

1. Schultz - Piszachich ,W.  
Tensoralgebra und - analysis ,Aus der Serie Mathematik fuer  
Ingenieure Naturwissenschaftler Oekonomen Landwirte (Hrsgb.O.Beyer;  
H. Erfurth ; O .Greuel ;H.Kander ; K.Mateuffel ; G. Zeidler) Bd.11,  
BSB .B.G Teubner verlagsgesellschaft , Leipzig 1988
2. Weaver ,w.;Johnston , P.R.  
Structural dynamics by finite elements  
Prentice-Hall , Englewood cliffs , New Jersey ,1987
3. Abo Diab,S.  
Entwicklung und einsatz gemischt -hybrider finiter Elemente Fuer  
Aufgaben der linearen Kinetik von Faltwerken - Ein Beitrag zu  
FALT-FEM, Technische Universitaet Dresden ,diss 1989.
4. Girkmann,K.  
Flaechentragwerke  
Springer- Verlag , 1983
5. Oden ,J.T.;Kikuchi,N.  
Finite element method for constrained problems in Elasticity  
Int.J.Num.Meth.Eng., V ol.18,P.701-725,1982.
6. Batoz, J.L.;Ben Tahhar,M.  
Evalution of a new quadrilateral thin plate bending element ,  
Int.J.Num.Meth.Eng, Vol.18,P.1655-77,1982.
7. Brebbia , C.A.  
Finite -Element-Systeme-A Handbook  
Springer-Verlag, 1985
8. Oden , J.T. ;Reddy ,J.N.

Variational Methods in Theoretical Mechanics  
Springer-Verlag , 1976.

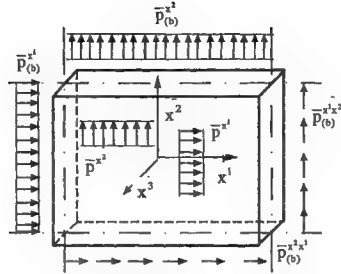
9.Timoshenko , S.T. ;Goodier , J.N.  
Theory of elasticity , Third Eddition ,MCGraw-Hill Book Company.  
1970

10.Meiszner,U.  
Finite - Element - Analysis  
Springer - Verlag , Berlin 1974

11.Gallagher,R.H.  
Finite - Element - Analysis  
Springer-Verlag,Berlin 1974

12.Clough,R.W;Penzien,J.  
Dynamics of Structures  
MCGrow-Hill Book Company , New York ,1975.

## 7- الشرائح الرقيقة:



شكل (7-1): شريحة رقيقة، المحاور الإحداثية  
المستوي الوسطي، الحملات

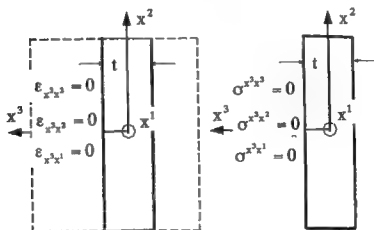
في هذا الفصل سوف تدرس الخطوط الأساسية لنظرية الشرائح الرقيقة بتفصيل مسهب إذ تدرس في البدء الخطوط الأساسية لمعادلات نظرية المرونة الحاليّ عمل الشرائح كحالة إجهادات مستوية وكحالة تشوهات مستوية وسوف تدرس هاتان الحالتان بصيغة موحّدة ويشار إلى نقاط الاختلاف عند ورودها. بالإضافة إلى ذلك سوف يعرض عدد من العناصر المنتهية المطبورة لحل مسائل الشرائح الرقيقة وسيتم حل عدد ليس بالقليل من الأمثلة الحسابية لمختلف المشاكل الإنشائية كتعرض الشرائح للحمولات الخارجية والفروقات الحرارية وهبوط المساند.

تعرف الشرائح بأنها منشآت مستوية ينحصر حجمها بين مستويين متوازيين البعد بينهما يمثل سماكة الشريحة وهو أصغر بكثير من البعدين الآخرين، وتعرض الشرائح فقط لحمولات واقعة في مستويها ويفترض أن يبقى المستوي الوسطي للشريحة مستويًا بعد تعرضها للمؤثرات الخارجية. يمثل الشكل (7-1) شريحة مستوية معرضة لتأثير الأحمال الخارجية، وقد نسبت هذه الشريحة إلى جملة محاور إحداثية وحد المستوي  $x^1x^2$  كمستوي وسطي للشريحة. يفترض عادة

أن الحملات الخارجية مطبقة في المستوي الوسطي للشريحة. وعلى هذا الأساس وضعت فرضيات تسهيلية لدراسة الشرائح بشكل مبسط واشتقت على أسس هذه الفرضيات معادلات نظرية المرونة. وسوف تستعرض في البدء حالات عمل الشرائح المفترضة قبل البدء باستعراض معادلات نظرية المرونة للشرائح الرقيقة.

يصنف عمل الشرائح وفق طبيعة الإجهادات أو التشوهات المفترض حصولها في الوسط الممثل للشريحة وتنضوي طبيعة عمل الشرائح تحت حالتين أساسيتين، أولهما تسمى حالة الإجهادات المستوية وتسمى الثانية حالة التشوهات المستوية.

في حالة الإجهادات المستوية يفترض بأن السطوح المحددة للشريحة والموازية للمستوي الوسطي للشريحة  $x^1x^2$  أي السطحين  $x^3 = \pm \frac{t}{2}$  خالية من الإجهادات شكل (7-2-أ) وعليه تكون إجهادات هذه السطوح وهي  $\sigma^{x^3x^3}, \sigma^{x^3x^2}, \sigma^{x^3x^1}$  معروفة.



(b) حالة التشوهات المستوية

(a) حالة الإجهادات المستوية

شكل 7-2: حالات عمل الشرائح

كما يفترض أن الإجهادات المتبقية وهي  $\sigma^{x^2x^2}, \sigma^{x^2x^1}, \sigma^{x^1x^1}$  لا تتغير باتجاه  $x^3$  وبالتالي تكون هذه الإجهادات تابعة فقط للإحداثيات المستقلة  $x^1, x^2$  أي أن :

$$\begin{aligned}
\sigma^{x^1x^1} &= \sigma^{x^1x^1}(x^1, x^2) \\
\sigma^{x^2x^1} &= \sigma^{x^2x^1}(x^1, x^2) \\
\sigma^{x^1x^2} &= \sigma^{x^1x^2}(x^1, x^2) \\
\sigma^{x^2x^2} &= \sigma^{x^2x^2}(x^1, x^2)
\end{aligned}
\quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x^1, x^2) \quad (7-1)$$

و العلاقات (7-1) تمثل الجاهيل الستاتيكية لحالة الإجهادات المستوية. إذا ما اعتبرت الحالة الإجهادية السائدة هذه كحالة أساسية أو كنقطة انطلاقي تكون حالة التشوهات السائدة والمنبثقة عن علاقات التشوهات- الإجهادات (العلاقات 32 - 2) ممثلة بالمعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x^1x^1} &= \frac{1}{E}(\sigma^{x^1x^1} - \nu\sigma^{x^2x^2}) \\
\varepsilon_{x^2x^1} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma^{x^2x^1} \\
\varepsilon_{x^1x^2} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma^{x^1x^2} \\
\varepsilon_{x^2x^2} &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma^{x^1x^1} + \sigma^{x^2x^2}) \\
\varepsilon_{x^3x^3} &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma^{x^1x^1} - \nu\sigma^{x^2x^2})
\end{aligned} \quad (7-2)$$

بناء على هذه العلاقات يكون جزء موترة التشوهات:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x^1x^1} &= \varepsilon_{x^1x^1}(x^1, x^2) \\
\varepsilon_{x^2x^1} &= \varepsilon_{x^2x^1}(x^1, x^2) \\
\varepsilon_{x^1x^2} &= \varepsilon_{x^1x^2}(x^1, x^2) \\
\varepsilon_{x^2x^2} &= \varepsilon_{x^2x^2}(x^1, x^2)
\end{aligned}
\quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x^1, x^2) \quad (7-3)$$

متعلقا فقط بالإحداثيات المستقلة  $x^1, x^2$ . كما أن التشوه :

$$\varepsilon_{x^3x^3} = \varepsilon_{x^3x^3}(x^1, x^2) \quad (7-4)$$

متعلق فقط بنفس الإحداثيات المستقلة مما يعني أن التشوهات أيضاً ثابتة على سماكة الشريحة. وهذا يؤدي بدوره إلى تناقض هذه النتيجة مع المعطيات الأساسية المفترضة في العلاقات (1-7) إذ أن حالة هذه الإجهادات المفترضة غير متوافقة مع حالة التشوهات الناتجة. ويتحلل هذا التناقض واضحاً في علاقات التوافق، فحالة التشوهات الناتجة تؤدي إلى استحالة تحقيق المعادلات الثانية والثالثة والأخيرة من علاقات التوافق (2-38). وذلك لأن المشتقات :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x^1 x^1, x^2} &= 0 \\ \varepsilon_{x^2 x^2, x^1} &= 0 \\ \varepsilon_{x^1 x^2, x^1} &= 0 \end{aligned} \quad (7-5)$$

غير مساوية للصفر، بينما تكون مشتقات توابع التشوهات جميعها بالنسبة للإحداثي المستقل  $x^3$  معدومة. وبالتالي فالحلول الناتجة عن فرضيات عمل الشرائح وفق الحالة الإجهادية المستوية ما هي إلا حلول تقريبية. جدير بالذكر هنا أن لحساب المجاهيل الستاتيكية والكيميائية :

$\sigma^{x^1 x^1}, \sigma^{x^1 x^2}, \sigma^{x^2 x^1}, \varepsilon_{x^1 x^1}, \varepsilon_{x^1 x^2}, \varepsilon_{x^2 x^1}$  لدينا فقط معادلتين توازن وهي معادلة إسقاط في اتجاه كل من المحاور الإحداثية  $x^1, x^2$  وأربع معادلات ممثلة بعلاقات التشوهات الانتقالات (2-7) (مع اعتبار تناظر  $\sigma^{x^1 x^2} = \sigma^{x^2 x^1}$  :  $\varepsilon_{x^1 x^2} = \varepsilon_{x^2 x^1}$ ). والسؤال غير مقرر ستاتيكية ويستعان بالمعادلة الأولى من علاقات التوافق (2-38) لحساب المجاهيل الستاتيكية والكيميائية، وحالة الإجهادات المستوية حالة شائعة بالنسبة للشرائح المحدودة السماكة والمعرضة لقوى في مستوياتها.

تصادف حالة التشوهات المستوية في الشرائح الممتدة إلى مالا نهاية شكل (7-2ب) فعند اقتطاع شريحة بعرض  $t$  من وسط الشريحة بقصد دراسته يمكن الاعتبار بأن التشوه في اتجاه الامتداد اللانهائي للشريحة معرقل. وعليه تعتبر التشوهات  $\varepsilon_{x^1 x^1}, \varepsilon_{x^2 x^2}, \varepsilon_{x^1 x^2}$  معدومة والتشوهات الأخرى:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x^1 x^1} &= \varepsilon_{x^1 x^1}(x^1, x^2) \\ \varepsilon_{x^2 x^2} &= \varepsilon_{x^2 x^2}(x^1, x^2) \\ \varepsilon_{x^1 x^2} &= \varepsilon_{x^1 x^2}(x^1, x^2) \\ \varepsilon_{x^2 x^1} &= \varepsilon_{x^2 x^1}(x^1, x^2) \end{aligned} \quad , \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x^1, x^2) \quad (7-6)$$



مستوية وغير متعلقة بالإحداثي المستقل  $x^3$ . في حال اعتبار حالة التشوهات هذه كمحالة أساسية وتنبثق عنها الحالة الإجهادية، عندها تعتبر العلاقات التالية:

$$\begin{aligned}\sigma^{x^1x^1} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{x^1x^1} + \nu\varepsilon_{x^2x^2}] \\ \sigma^{x^2x^1} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{x^1x^2} \\ \sigma^{x^1x^2} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{x^1x^1} + (1-\nu)\varepsilon_{x^2x^2}] \\ \sigma^{x^3x^3} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu \cdot \varepsilon_{x^1x^1} + 0\varepsilon_{x^2x^2}]\end{aligned}\quad (7.7)$$

عن علاقات الإجهادات - التشوهات.

وباعتبار أن التشوهات متعلقة فقط بالإحداثيات المستقلة  $(x^1, x^2)$  يكون أيضاً جزءاً مؤثرة الإجهادات:

$$\begin{aligned}\sigma^{x^1x^1} &= \sigma^{x^1x^1}(x^1, x^2) \\ \sigma^{x^2x^1} &= \sigma^{x^2x^1}(x^1, x^2) \\ \sigma^{x^1x^2} &= \sigma^{x^1x^2}(x^1, x^2) \\ \sigma^{x^2x^2} &= \sigma^{x^2x^2}(x^1, x^2)\end{aligned}\quad ; \sigma^{\parallel} = \sigma^{\parallel}(x^1, x^2) \quad (7-8)$$

ثابتاً على صياغة الشريحة المعتمة  $\varepsilon$  وغير متعلق بالإحداثي المستقل  $x^3$  كما يكون الإجهاد :

$$\sigma^{x^2x^2} = \sigma^{x^2x^2}(x^1, x^2) \quad (7-9)$$

ثابتاً أيضاً وغير متعلق بالإحداثي المستقل  $x^3$ . خلافاً لحالة الإجهادات المستوية تمثل الحلول الناتجة عن فرضيات عمل الشرائح وفق حالة التشوهات المستوية حلاً دقيقاً لنظرية المرونة. إذ أن كسل معادلات التوافق (38-2) باستثناء الأولى محققة بافتراض حالة التشوهات المستوية، ويتم تحقيق المعادلة الأولى أثناء صياغة للمعادلة التفاضلية لحالة التشوهات المستوية.

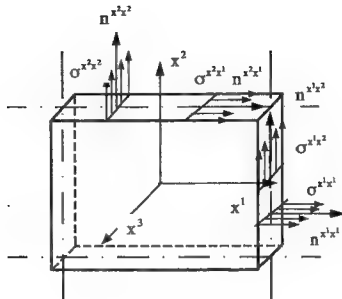
في هذا الفصل لن تتم دراسة كل حالة من حالات عمل الشرائح على حدى. إنما سيتم إعطاء صياغة مناسبة للمعادلات الأساسية لنظرية الشرائح ترتبط فيها الجاهيل الستاتيكية والكينماتيكية مع بعضها البعض بشكل مناسب. وسيتم التنويه عن الاختلافات بين حالة الإجهادات المستوية وحالة التشوهات المستوية أثناء وجودها في سياق الاشتقاقات المعطاة.

## 7-1-1- معادلات نظرية المرونة في الإحداثيات الديكارتية:

### 7-1-1-1- الجاهيل نظرية المرونة:

نستنتج مما سبق أن انتقالات نقاط الشريحة جميعها تعين بتعين انتقالات المستوي الوسطي للشريحة. وباعتبار أن الانتقالات تتم في نفس المستوي الوسطي للشريحة فتعين انتقالات المستوي الوسطي يتم بتعين الانتقالين  $u_x, u_y$  لكل نقطة من نقاط هذا المستوي. وسوف يستغنى هنا عن تمييز انتقالات المستوي الوسطي بالشكل  $u^x, u^y$  وذلك لتطابق  $u^x$  مع  $u_x$  و  $u^y$  مع  $u_y$ . بالإضافة إلى الانتقالين  $u_x, u_y$  سوف نعتبر مؤثرة التشوهات المختصرة (3-7) أو (6-7) ممثلة للجاهيل الكينماتيكية المستقلة للمأخوذة بعين الاعتبار. نحصل على قوى المقطع بمعاملة الإجهادات على سطوح المقاطع وباعتبار التوزع المنتظم للإجهادات أو التشوهات على سطوح المقاطع نحصل على قوى للمقطع التالية لواحدة الطول من الشريحة:

$$\begin{aligned} n^{x^1_1} &= \int_A \sigma^{x^1_1} \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{x^1_1} \cdot 1 \cdot dx^3 = \sigma^{x^1_1} \cdot t \\ n^{x^2_1} &= \int_A \sigma^{x^2_1} \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{x^2_1} \cdot 1 \cdot dx^3 = \sigma^{x^2_1} \cdot t \\ n^{x^3_1} &= \int_A \sigma^{x^3_1} \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{x^3_1} \cdot 1 \cdot dx^3 = \sigma^{x^3_1} \cdot t \\ n^{x^1_2} &= \int_A \sigma^{x^1_2} \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{x^1_2} \cdot 1 \cdot dx^3 = \sigma^{x^1_2} \cdot t \end{aligned} \quad (7-10)$$



شكل (7-3) قوى المقطع للشريحة

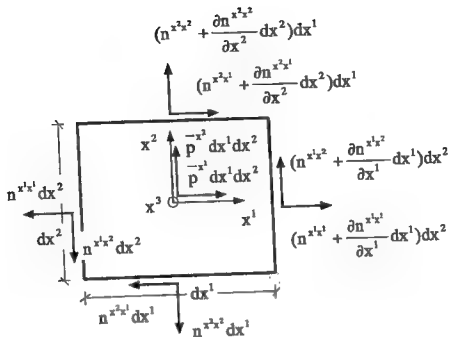
وقوى المقطع هذه بالإضافة إلى الإجهادات ممثلة على الشكل (7-3). ويعبر عن (7-10) باستخدام كتابة القرائن بالشكل :

$$n^j = t \cdot \sigma^j \quad (7-11)$$

7-1-2-معادلات نظرية المرونة:

7-1-2-1-معادلات التوازن:

بعد اقتطاع عنصر تفاضلي  $dx^1 dx^2$  من شريحة مستوية وتمثيل قوى المقطع على الضفة السالبة للمقطع وتغيرات قوى المقطع المكافئة للحدود الأولى الخطية من منشور قوى المقطع وفق سلسلة تايلور على الضفة الموجبة للمقطع وكتابة معادلات التوازن، وهي معادلة إسقاط في اتجاه المحور  $x^1$  ومعادلة إسقاط في اتجاه المحور  $x^2$  ومعادلة عزوم حول المحور  $x^3$  نحصل على النتيجة التالية:



شكل (7-4) عنصر تفاضلي مقطوع من شريحة، المحاور الإحداثية، قوى المقطع، الحملات.

$$n^{x^1 x^1} + n^{x^2 x^1} + \bar{p}^{x^1} = 0 \quad (7-12)$$

$$n^{x^1 x^2} + n^{x^2 x^2} + \bar{p}^{x^2} = 0$$

$$n^{x^1 x^2} = n^{x^2 x^1}$$

ويمر عن المعادلات السابقة بكتابة القرائن بالشكل :

$$n^{ij} + \bar{p}^i = 0 \quad (7.13)$$

$$n^{ij} = n^{ji}$$

يتضح من معادلات التوازن السابقة أن انتقال القوى في المنشآت المستوية لا يتم فقط مع اتجاه تطبيق الحملات وإنما يتعلق بتغير قوى القص في الاتجاه العمودي على اتجاه تطبيق الحملات.

## 7-1-2-2-علاقات التشوهات-الانفعالات.

تعر العلاقات التالية:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x^1x^1} &= \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^1} \\
\varepsilon_{x^1x^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^1} + \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^2} \right) \\
\varepsilon_{x^2x^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{x^1}}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^1} \right) \\
\varepsilon_{x^2x^2} &= \frac{\partial u_{x^2}}{\partial x^2}
\end{aligned}
\quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7-14)$$

عن علاقات التشوهات الانتقالية لحالة الشريحة الرقيقة.

### 7-1-2-3- قانون السلوك:

يمثل قانون السلوك لحالة الشريحة بالمعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
\sigma^{x^1x^1} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{x^1x^1} + \nu\varepsilon_{x^2x^2} + \nu\varepsilon_{x^3x^3}] \\
\sigma^{x^2x^2} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{x^1x^1} + (1-\nu)\varepsilon_{x^2x^2} + \nu\varepsilon_{x^3x^3}] \\
\sigma^{x^3x^3} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{x^1x^1} + \nu\varepsilon_{x^2x^2} + (1-\nu)\varepsilon_{x^3x^3}] \\
\sigma^{x^1x^2} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{x^1x^2} \\
\sigma^{x^1x^3} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{x^1x^3}
\end{aligned} \quad (7-15)$$

وهذه المعادلات مشتقة من قانون هوك للحالة الفراغية (2-31) بعد اعتبار الحالة الخاصة لمعسل الشريحة. فهي إما وفق حالة الإجهادات المستوية والتي يكون فيها  $(\sigma^{x^2x^1} = \sigma^{x^1x^2} = \sigma^{x^3x^2} = \sigma^{x^2x^3} = 0)$  وإما وفق حالة التشوهات المستوية ويكون فيها  $(\varepsilon_{x^3x^1} = \varepsilon_{x^1x^3} = \varepsilon_{x^3x^2} = \varepsilon_{x^2x^3} = 0)$ .

لحالة التشوهات المستوية تبسط العلاقات (7-15) لتصبح مطابقة للعلاقات (7-7) وذلك باعتبار  $\varepsilon_{x^2x^2} = 0$  . وحالة الإجهادات المستوية يفترض أن يكون  $\sigma^{x^2x^2} = 0$  وهذا يعني أن المعادلة الثالثة من العلاقات (7-15) يجب أن تكون مكافئة للصفر وهذا يقضي إلى المساواة التالية:

$$\varepsilon_{x^2x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{x^1x^1} + \varepsilon_{x^2x^2}) \quad (7-16)$$

وبتمريض هذه القيمة في المعادلتين الأولى والثانية من العلاقات (7-15) نحصل على:

$$\begin{aligned} \sigma^{x^1x^1} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{x^1x^1} + \nu\varepsilon_{x^2x^2}) \\ \sigma^{x^2x^2} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{x^1x^1} + \varepsilon_{x^2x^2}) \end{aligned} \quad (7-17)$$

وللحالتين أي حالة الإجهادات المستوية وحالة التشوهات المستوية يمكن كتابة قانون السلوك بالشكل المهود:

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (7-18)$$

وهو تفصيليا بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{x^1x^1} \\ \sigma^{x^2x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{x^1x^1x^1x^1} & c^{x^1x^1x^2x^2} & c^{x^1x^1x^1x^2} & c^{x^1x^1x^2x^1} \\ c^{x^2x^1x^1x^1} & c^{x^2x^1x^2x^2} & c^{x^2x^1x^1x^2} & c^{x^2x^1x^2x^1} \\ c^{x^1x^2x^1x^1} & c^{x^1x^2x^2x^2} & c^{x^1x^2x^1x^2} & c^{x^1x^2x^2x^1} \\ c^{x^2x^2x^1x^1} & c^{x^2x^2x^2x^2} & c^{x^2x^2x^1x^2} & c^{x^2x^2x^2x^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^2x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^2} \end{bmatrix} \quad (7-19)$$

والنشر يتم باعتبار أن القرينة 1 تتحول بأسرع من 2 والقرينة 1 تتحول بأسرع من 2 . وتم تحويل المصفوفة الرباعية  $C^{ijkl}$  إلى مصفوفة ثنائية كما و أن القرينتين 1 و 2 قد جمعتا في قرينة واحدة وكذلك القرينتين 1 و 2 . وعلى القارئ نشر العلاقة (7-18) بالمبادئ المعروفة لديه ومقارنة المنشور الناتج مع ذلك المعطى في العلاقة (7-19). ولكلا حالتى الإجهادات المستوية والتشوهات المستوية يكون:

$$c^{x^1x^1x^1x^1} = c^{x^2x^2x^2x^2} = c^{x^1x^2x^2x^1} = c^{x^2x^1x^1x^2} = c^{x^1x^2x^1x^2} = c^{x^2x^1x^2x^1} = c^{x^1x^1x^2x^2} = c^{x^2x^2x^1x^1} = 0 \quad (7-20)$$

وهنا تتميز حالة الإجهادات المستوية عن حالة التشوهات المستوية. فلحالة الإجهادات المستوية يكون:

$$\begin{aligned}
c^{x^1x^1x^1x^1} &= c^{x^2x^2x^2x^2} = c \\
c^{x^1x^1x^2x^2} &= c^{x^2x^2x^1x^1} = v \cdot c \\
c^{x^1x^2x^1x^2} &= c^{x^2x^1x^2x^1} = c^{x^1x^2x^2x^1} = c^{x^2x^1x^1x^2} = \frac{1}{2}(1-v) \cdot c
\end{aligned} \quad (7-21)$$

$$c = \frac{E}{1-v^2}$$

مع العلاقة الإضافية:

$$\varepsilon_{x^1x^1} = -\frac{v}{E}(\sigma^{x^1x^1} + \sigma^{x^2x^2}) \quad (7-22)$$

ولحالة التشوهات المستوية يكون :

$$\begin{aligned}
c^{x^1x^1x^1x^1} &= c^{x^2x^2x^2x^2} = c \\
c^{x^1x^1x^2x^2} &= c^{x^2x^2x^1x^1} = v \cdot c \\
c^{x^1x^2x^1x^2} &= c^{x^2x^1x^2x^1} = c^{x^1x^2x^2x^1} = c^{x^2x^1x^1x^2} = \frac{1}{2}(1-v) \cdot c
\end{aligned} \quad (7-23)$$

$$c = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}$$

مع العلاقة الإضافية :

$$\sigma^{x^2x^2} = v \cdot (\sigma^{x^1x^1} + \sigma^{x^2x^2}) \quad (7-24)$$

والعلاقة السابقة يمكن استنتاجها مباشرة من مقارنة للمعادلتين الأولى والرابعة من العلاقات (7-7) مع المعادلة الخامسة من العلاقات نفسها.

#### 7-1-2-4-علاقات قوى المقطع-الانتقالات:

بتمريض قانون السلوك (7-18) في العلاقة (7-11) نحصل على علاقات تربط بين قوى المقطع والتشوهات:

$$n^{\mu} \approx t \cdot c^{\mu\mu} \cdot \varepsilon_{\mu} \quad (7-25)$$

وبتبديل علاقة التشوهات -الانتقالات (7-14) في العلاقة السابقة نحصل على علاقة قوى المقطع-  
الانتقالات :

$$n^u = \frac{1}{2} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (7-26)$$

#### 7-1-3-المعادلة التفاضلية:

يتم الحصول على المعادلة التفاضلية للانتقالات بتعويض علاقات قوى المقطع-الانتقالات (7-26) في معادلات التوازن (7-13):

$$\left[ \frac{1}{2} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot (u_{k,l} + u_{l,k}) \right]_{,j} + \bar{p}^i = 0 \quad (7-27)$$

في حالة ثبات المعاملات  $c^{ijkl}$  يمكن إخراجها خارج قوس التفاضل ونحصل بالنتيجة التالية على  
المعادلتين التفاضليتين التاليتين للانتقالات :

$$\begin{aligned} t \cdot c^{111111} \cdot u_{x^1, x^1} + t \cdot c^{221111} \cdot u_{x^1, x^2} + t \cdot (c^{111122} + c^{221112}) \cdot u_{x^1, x^2} + \bar{p}^1 &= 0 \\ t \cdot c^{221111} \cdot u_{x^1, x^2} + t \cdot c^{111122} \cdot u_{x^2, x^1} + t \cdot (c^{221122} + c^{112211}) \cdot u_{x^1, x^2} + \bar{p}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (7-28)$$

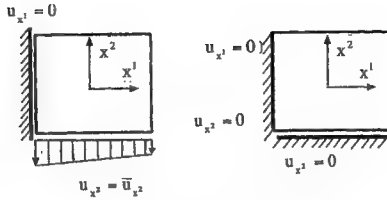
تعتمد الطريقة الكلاسيكية على إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية السابقة.  
تحتوي مثل هذه الحلول على ثوابت المعادلة التفاضلية والتي يتم تحديدها لكل مسألة على حدى  
من الشروط الطرفية.

#### 7-1-4-الشروط الطرفية:

##### 7-1-4-1-الشروط الطرفية الهندسية:

تصاغ الشروط الطرفية الهندسية لتعبر رياضياً عن شروط استناد الشريحة





شكل (5-7): شروط طرفية هندسية

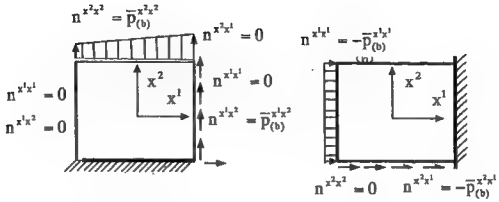
والشكل (5-7) يبين بعض الأمثلة على صياغة مثل هذه الشروط، والتعبير الرياضي كما نعلم هو:

$$u_{x_1} = \bar{u}_{x_1} \quad \text{on} \quad S_u \quad (7.29)$$

حيث  $\bar{u}_{x_1}, \bar{u}_{x_2}$  قيم للانتقالات معلومة على الأطراف والتي تكون فيها الانتقالات معلومة ( $S_u$ ). ويمكن أن تمثل  $\bar{u}_{x_1}, \bar{u}_{x_2}$  توابع ناتجة بقيم معلومة مسبقاً على الأطراف المذكورة.

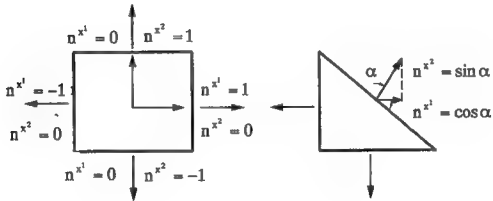
#### 7-1-4-2- الشروط الطرفية الميكانيكية:

من خلال الشروط الطرفية الميكانيكية تعرف الإجهادات على الأطراف  $S_\sigma$  بحيث تتساوى توابع الإجهادات الداخلية مع توابع الإجهادات الناشئة عن القوى الخارجية للمعلومة المطبقة على تلك الأطراف.



شكل (6-7): شروط طرفية ميكانيكية.

ولاختلاف إشارة العلاقات الطرفية لتساوي القوى الداخلية مع القوى الخارجية كما يبين الشكل (6-7) يعرف شعاع النظم الموجب بأنه شعاع النظم الخارج من الطرف (شكل 7-7) عندها تصاغ الشروط الطرفية الميكانيكية بالشكل:



شكل (7-7): مركبات شعاع النظم الموجب.

$$\begin{aligned}
n^{x^1x^1} \cdot n_{x^1} &= \bar{p}^{-x^1} \quad (b) \\
n^{x^1x^2} \cdot n_{x^2} &= \bar{p}^{-x^1} \quad (b) \\
n^{x^1x^2} \cdot n_{x^1} &= \bar{p}^{-x^1x^2} \quad (b) \\
n^{x^2x^1} \cdot n_{x^2} &= \bar{p}^{-x^2x^1} \quad (b)
\end{aligned}
\tag{7-30}$$

من الصعوبة بمكان إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية للانتقالات والتي تحقق الشروط الطرفية المذكورة لذلك يلجأ عادة إلى إدخال ما يسمى بتوابع الإجهادات (توابع AIRY). ونختار توابع الإجهادات هذه بحيث تحقق نفس الشروط التي تتطلبها المعادلات التفاضلية الآتية الذكر.

#### 7-1-5- توابع الإجهادات (توابع AIRY):

يجب أن تحقق توابع الإجهادات المدخلة شروط التوازن على عنصر تفاضلي. بافتراض أن تابع الإجهادات هذا، الذي يحقق شروط التوازن تابع من الشكل  $R(x^1, x^2)$ ؛ فمعادلات التوازن (7-12) تقتضي في حالة عدم وجود حمولات موزعة أن يكون:

$$\begin{aligned}
n^{x^1x^1} &= e^{x^1x^2} e^{x^1x^1} f_{,x^2x^2} \\
n^{x^2x^2} &= e^{x^2x^1} e^{x^2x^1} f_{,x^1x^1} \\
n^{x^1x^2} &= e^{x^1x^2} e^{x^2x^1} f_{,x^2x^1} \\
n^{x^2x^1} &= e^{x^2x^1} e^{x^1x^2} f_{,x^1x^2} \\
e^{x^1x^2} &= 1; e^{x^2x^1} = -1; \bar{p}^{-x^1} = 0; \bar{p}^{-x^2} = 0
\end{aligned}
\tag{7-31}$$

ويمكن تحقيق معادلات التوازن أيضا في الحالة التي تكون فيها الحمولات  $\bar{p}^{-x^1}, \bar{p}^{-x^2}$  ثابتة وموزعة بانتظام على مساحة الشريحة. في هذه الحالة تبقى المعادلتان الأولى والثانية من العلاقات (31-7) دون تغيير أما المعادلتان الثالثة والرابعة فتصبحان:

$$n^{x^1x^2} = e^{x^1x^2} e^{x^1} (f_{,x^2x^1} + x^{x^2} \bar{p}^{x^1} + x^{x^1} \bar{p}^{x^2}) \quad (7-32)$$

$$n^{x^2x^1} = e^{x^2x^1} e^{x^1x^2} (f_{,x^1x^2} + x^{x^2} \bar{p}^{x^1} + x^{x^1} \bar{p}^{x^2})$$

وبعد اختيار تابع الإجهادات  $F(x^1, x^2)$  يحقق لشروط التوازن يفترض به الآن أن يحقق علاقات التشوهات-الانتقالات (7-14) وقانون السلوك (7-19) أو علاقات قوى المقطع-التشوهات (7-25) بالإضافة إلى تحقيق للشروط الطرفية الهندسية والميكانيكية. ولكي يحصل ما سبق ذكره يجب إدخال المعادلات السابقة في اشتقاق المعادلة التفاضلية. ولهذا الغرض تجرى بعض التعديلات في كتابة هذه المعادلات. من علاقات التشوهات-الانتقالات نحصل بالتفاضل المباشر على علاقة التوافق التالية:

$$e^{x^1x^1} e^{x^1x^2} \varepsilon_{x^1x^1, x^2x^2} + e^{x^2x^1} e^{x^2x^1} \varepsilon_{x^2x^2, x^1x^1} + e^{x^1x^2} e^{x^1x^2} \varepsilon_{x^1x^2, x^2x^1} + e^{x^2x^1} e^{x^2x^1} \varepsilon_{x^2x^1, x^1x^2} = 0 \quad (7-33)$$

وهذه العلاقة مطابقة لمعادلة التوافق الأولى من العلاقات (2-38). والتي سبق ذكرها بالأسفل. سنستخدم لحساب المجاهيل الستاتيكية والكينماتيكية.

يتم الآن كتابة قانون السلوك بدلالة التشوهات بإيجاد مقلوب العلاقة (7-18) فنحصل على:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma^{kl} \quad (7-34)$$

وهي تفصيلياً:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x^1x^1} \\ \varepsilon_{x^2x^1} \\ \varepsilon_{x^1x^2} \\ \varepsilon_{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x^1x^1x^1x^1} & s_{x^1x^1x^2x^1} & s_{x^1x^1x^1x^2} & s_{x^1x^1x^2x^2} \\ s_{x^2x^1x^1x^1} & s_{x^2x^1x^2x^1} & s_{x^2x^1x^1x^2} & s_{x^2x^1x^2x^2} \\ s_{x^1x^2x^1x^1} & s_{x^1x^2x^2x^1} & s_{x^1x^2x^1x^2} & s_{x^1x^2x^2x^2} \\ s_{x^2x^2x^1x^1} & s_{x^2x^2x^2x^1} & s_{x^2x^2x^1x^2} & s_{x^2x^2x^2x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{x^1x^1} \\ \sigma^{x^2x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^2} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

والمعاملات:

$$s_{x^1x^1x^2x^1} = s_{x^1x^1x^1x^2} = s_{x^2x^1x^1x^1} = s_{x^2x^1x^2x^1} = s_{x^1x^2x^1x^1} = s_{x^1x^2x^2x^1} = s_{x^2x^2x^1x^1} = 0 \quad (7-36)$$

لكلا حالي التشوهات المستوية والإجهادات المستوية. وحالة الإجهادات المستوية يكون:

$$\begin{aligned}
S_{x^1x^1x^1x^1} &= S_{x^2x^2x^2x^2} = S \\
S_{x^1x^1x^2x^2} &= S_{x^2x^2x^1x^1} = -v \cdot S \\
S_{x^1x^2x^1x^2} &= S_{x^2x^1x^2x^1} = S_{x^1x^2x^2x^1} = S_{x^2x^1x^1x^2} = \frac{1}{2}(1+v) \cdot S \\
S &= \frac{1}{E}
\end{aligned} \tag{7-37}$$

ولحالة التشوهات المستوية يكون:

$$\begin{aligned}
S_{x^1x^1x^1x^1} &= S_{x^2x^2x^2x^2} = (1-v) \cdot S \\
S_{x^1x^1x^2x^2} &= S_{x^2x^2x^1x^1} = -v \cdot S \\
S_{x^1x^2x^1x^2} &= S_{x^2x^1x^2x^1} = S_{x^1x^2x^2x^1} = S_{x^2x^1x^1x^2} = \frac{1}{2} \cdot S \\
S &= \frac{1+v}{E}
\end{aligned} \tag{7-38}$$

ولتلافي الالتباس ننوه هنا أن  $S, C$  استخدمت بقيم مختلفة في العلاقات (7-21), (7-23), (7-37), (7-38). ومن العلاقة (7-34) نستطيع استنتاج علاقة تربط بين التشوهات وقوى المقطع:

$$E_{ij} = \frac{1}{t} \cdot S_{ijkl} \cdot \Pi^k \tag{7-39}$$

وكان بالإمكان إيجاد مثل هذه العلاقة مباشرة بأخذ معكوس العلاقة (7-25).

بتعويض العلاقات (7-31) في العلاقة (7-33) وإجراء عمليات اشتقاق العلاقة الناتجة وفق علاقة التوافق (7-33) نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحكم مسألة الشريحة على الشكل:

$$\frac{\partial^4 F}{(\partial x^1)^4} + \frac{\partial^4 F}{(\partial x^1)^2 (\partial x^2)^2} + \frac{\partial^4 F}{(\partial x^2)^2 (\partial x^1)^2} + \frac{\partial^4 F}{(\partial x^2)^4} = 0 \tag{7-40}$$

أو بإدخال معامل لا بلاس:

$$\Delta \Delta F = 0 \tag{7-41}$$

ولكل مسألة من مسائل الشرائح يجب إيجاد تواضع الإجهادات التي تحقق للمعادلة التفاضلية (7-41) بالإضافة إلى تحقيقها للشروط الطرفية الهندسية والميكانيكية الخاصة بكل مسألة. وحالات بسيطة وطبولوجيات هندسية منتظمة يمكن إيجاد الحلول التحليلية للمعادلة التفاضلية. أما في الحالة العامة

فيلجأ عادة إلى الطرق العددية وفي مقدماتها طرائق العناصر المنتهية. وفي هذا الفصل لن نسم استعراض كل طرق العناصر المنتهية التي استعرضت في الفصل السادس لحل البلاطات الرقيقة، وإنما سيكتفى بعرض عنصر منتهي مستطيل من النموذج المحجّن لحل الشرائح، ويجمع هذا العنصر مع نظيره من النموذج المحجّن لحل البلاطات الرقيقة بغية استخدام العنصر الناتج في حل المنشآت المثنية المستوية.

## 7-2- عنصر شريحة مفلي في الإحداثيات الديكارتية:

كما رأينا أثناء اشتقاقنا لمبدأ الطاقة الكامنة الأصغري في ميكانيك المرونة الخطية أن هذا المبدأ يقتضي بأن يكون المتغير الأول لتابعي الطاقة الكامنة معلوماً ضمن شروط المسموحية الحركية لانتقالات الجسم المعزول طاقياً والقوى المطبقة المحفوظة. وقد عبر عن هذا المبدأ رياضياً بالشكل:

$$\delta\pi = \delta \left\{ \sum_v \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot dV - \int_V \bar{f}^i \cdot u_i \cdot dV - \int_{S_e} \bar{T}^i \cdot u_i \cdot ds \right\} = 0 \quad (7-42)$$

وبعد اعتبار الحالة الخاصة لعمل الشرائح سواءً ضمن صيغة الاجهادات المستوية أو التشوهات المستوية ومراعاة كافة الافتراضات الوارد ذكرها في مقدمة هذا الفصل تحوّل الصيغة الثلاثية الأبعاد (7.42) إلى الصيغة الثنائية البعد التالية:

$$\delta\pi = \delta \left\{ \sum_e \left( \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_{ij} \cdot t c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot dA - \int_A \bar{p}^i \cdot u_i \cdot dA - \int_{S_e} \bar{p}_{be}^i \cdot u_i^{be} \cdot ds \right) - \sum_m \bar{F}^{(m)} \cdot u_m \right\} = 0 \quad (7-43)$$

حيث:

$u_i^{be}$ : الانتقالات على محيط العنصر المنتهي.

$\bar{p}_{be}^i$ : القوى الخارجية للمؤثرة على محيط العنصر المنتهي.

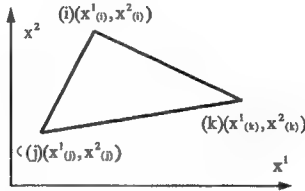
$\sum_m$ : المجموع على العقد المحملة بقوى مركزة.

$\bar{F}^{(m)}$ : القوة المركزة على العقدة (m).

$u_{(m)}$  : انتقالات العقدة (m) .

والرمز  $b, c$  يدل على محيط العنصر المنتهي.

لنقتطع الآن من شريحة مستوية عنصراً مثلثياً منسوباً إلى جملة محاور إحداثية ديكرتية وإحداثيات رؤوسه هي :  $(i)(x^1_{(i)}, x^2_{(i)})$ ,  $(j)(x^1_{(j)}, x^2_{(j)})$ ,  $(k)(x^1_{(k)}, x^2_{(k)})$  على التوالي ولكل عقدة من عقد العنصر درجتي حرية وهي الانتقال  $u_{x^1}$  والانتقال  $u_{x^2}$  . وباعتبار أن انتقالاً في اتجاه  $x^1$  لا يولد أي انتقال في اتجاه  $x^2$  يمكن أن نعتبر أن الانتقالين مستقلين عن بعضهما البعض.



شكل 7-8 : عنصر شريحة مثلثي ، المحاور الاحداثية ، احداثيات العقدة

ولهذا باستطاعتنا أن نختار لكل انتقال في اتجاه ما تابعاً تقريبياً متعلقاً فقط بدرجات حرية ذلك الاتجاه ومجموعها ثلاث درجات حرية وهي انتقالات رؤوس المثلث في ذلك الاتجاه. وأبسط اختبار هو أن نختار لتابع الانتقال  $u_{x^1}$  في نقطة ما لا على التعيين  $(x^1, x^2)$  واقعة ضمن المثلث التابع التقريبي التالي:

$$u_{x^1} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{x^1 0} \\ c_{x^1 1} \\ c_{x^1 2} \end{bmatrix} \quad (7-44)$$

ولتابع الانتقال  $u_p$  التابع التقريبي المشابه:

$$u_{x^2} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{x^2 0} \\ c_{x^2 1} \\ c_{x^2 2} \end{bmatrix} \quad (7-45)$$

ويتمميهما يمكن التعبير عن العلاقتين السابقتين بالكتابة بالقرائن كما يلي:

$$u_i = x^n c_{in}; n = 0, 1, 2; i = x^1, x^2 \quad (7-46)$$

تقتضي الشروط الطرفية اللازمة للعنصر المنتهي أن يولد كل من تابعي الانتقال ضمن العنصر المنتهي انتقالات العقد عند تعويض إحداثيات هذه الأخيرة في كل من التابعين. أي:

$$\begin{bmatrix} u_{x^1(i)} \\ u_{x^1(j)} \\ u_{x^1(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1(i) & x^2(i) \\ 1 & x^1(j) & x^2(j) \\ 1 & x^1(k) & x^2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{x^1 0} \\ c_{x^1 1} \\ c_{x^1 2} \end{bmatrix} \quad (7-47)$$

$$\begin{bmatrix} u_{x^2(i)} \\ u_{x^2(j)} \\ u_{x^2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1(i) & x^2(i) \\ 1 & x^1(j) & x^2(j) \\ 1 & x^1(k) & x^2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{x^2 0} \\ c_{x^2 1} \\ c_{x^2 2} \end{bmatrix} \quad (7-48)$$

أو اختصاراً :

$$u_{i(p)} = A^n_{(p)} \cdot c_{in} \quad (p)=(i),(j),(k) \quad (7-49)$$

ونوه هنا إلى أنه يجب عدم الالتباس بين (i) المستخدمة للدلالة على العقدة وبين القرينة i التي تحول على  $x^1, x^2$ . تتعين الثوابت الاختيارية  $c_{in}$  بدلالة انتقالات العقد بعكس العلاقة السابقة ومعكوسها هو:

$$c_{in} = B^n_{(p)} \cdot u_{i(p)} \quad (7-50)$$

حيث:

$$B^n_{(p)} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} x^1(i)x^2(k) - x^1(k)x^2(i) & -x^1(i)x^2(k) + x^1(k)x^2(i) & x^1(i)x^2(i) - x^1(i)x^2(i) \\ -x^2(k) + x^2(i) & x^2(k) - x^2(i) & -x^2(i) + x^2(i) \\ x^1(k) - x^1(i) & -x^1(k) + x^1(i) & x^1(i) - x^1(i) \end{pmatrix} \quad (7.51)$$



تنتج توابع الانتقالات التقريبية من تعويض الثوابت الاختيارية بقيمتها المحددة في (7-50)، (7-51) في (7-46) فنحصل على:

$$u_i = x^n \cdot B^{(p)}_s \cdot u_{i(p)} = N^{(p)} u_{i(p)} \quad (7-52)$$

حيث:

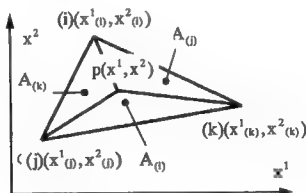
$$N^{(p)} = \begin{bmatrix} N^{(i)} & N^{(j)} & N^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2A_{(i)}}{2A} & \frac{2A_{(j)}}{2A} & \frac{2A_{(k)}}{2A} \end{bmatrix} \quad (7-53)$$

$$2A_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \\ 1 & x^1_{(i)} & x^2_{(i)} \\ 1 & x^1_{(k)} & x^2_{(k)} \end{bmatrix}, 2A_{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \\ 1 & x^1_{(j)} & x^2_{(j)} \\ 1 & x^1_{(i)} & x^2_{(i)} \end{bmatrix}, 2A_{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \\ 1 & x^1_{(i)} & x^2_{(i)} \\ 1 & x^1_{(j)} & x^2_{(j)} \end{bmatrix} \quad (7-54)$$

وقيم هذه المعينات تمثل مساحات المثلثات الثلاثة الجزئية المشكلة بوصل النقطة لا على التعمين الواقعة ضمن المثلث الأصلي إلى رؤوسه الثلاثة.

وتوابع الشكل هذه ليست سوى ما يسمى بالإحداثيات الطبيعية المثلثية والمعروفة كالتالي:

$$\lambda_1 = \frac{A_{(i)}}{A}; \lambda_2 = \frac{A_{(j)}}{A}; \lambda_3 = \frac{A_{(k)}}{A} \quad (7-55)$$



شكل 7-9: توابع الشكل كمساحات المثلثات الجزئية

كما سنرى لاحقاً أثناء دراسة المثلث في الإحداثيات الطبيعية.

الآن نستطيع وفق علاقات التشوهات-الانتقالات (7-14) إيجاد موثرة التشوهات:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= N^{(p)}_{,j} \cdot u_{i(p)} \\ u_{j,i} &= N^{(p)}_{,i} \cdot u_{j(p)} \end{aligned} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7-56)$$

وذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار تماثل المشتقات  $u_{j,i}, u_{i,j}$ ، والمصفوفة  $N^{(p)}_{,j}$  هي بالتفصيل:

$$N^{(p)}_{,j} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x^2_{(j)(k)} & x^1_{(k)(j)} \\ x^2_{(k)(i)} & x^1_{(i)(k)} \\ x^2_{(i)(j)} & x^1_{(j)(i)} \end{bmatrix}; \quad x^i_{(m)(n)} = x^i_{(m)} - x^i_{(n)} \quad (7-57)$$

يلاحظ أن موثرة التشوهات ثابتة وتعلق فقط بإحداثيات رؤوس المثلث وهي غير متعلقة بالإحداثيات المستقلة  $x^1, x^2$ . وتعبير الطاقة الداخلية يمكن تقييمه بكل بساطة بالشكل:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot dA = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \int_A dA = \frac{A}{2} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (7-58)$$

وذلك باعتبار أن التعابير التي أخرجت خارج إشارة التكامل كلها ثابتة ولا تحوي على المتحولات المستقلة  $x^1, x^2$ .

وبعد تعويض موثرة التشوهات بقيمتها من العلاقة (7-56) نحصل على:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} N^{(p)}_{,j} u_{i(p)} + \frac{1}{2} N^{(p)}_{,i} u_{j(p)} \right) \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \left( \frac{1}{2} N^{(q)}_{,i} u_{k(q)} + \frac{1}{2} N^{(q)}_{,k} u_{i(q)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot u_{i(p)} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot u_{k(q)} \end{aligned} \quad (7-59)$$

حيث:

$$k^{i(p)k(q)} = \left( \frac{1}{2} N^{(p)}_{,j} + \frac{1}{2} N^{(p)}_{,i} \right) \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \left( \frac{1}{2} N^{(q)}_{,i} + \frac{1}{2} N^{(q)}_{,k} \right) \quad (7-60)$$

مصفوفة المساواة للعنصر. وهذه المصفوفة تحوي 36 عنصراً كما هو واضح من تحول قرائتها. وعناصر هذه المصفوفة بعد تحويلها إلى مصفوفة ثنائية الأبعاد كما لو ضمت القريتين  $i(p)$  في قرينة واحدة و  $k(p)$  في قرينة واحدة أيضاً، هي:

$$k^{i(p)k(q)} = \begin{bmatrix} k^{x^1(i)x^1(i)} & k^{x^1(i)x^2(i)} & k^{x^1(i)x^1(j)} & k^{x^1(i)x^2(j)} & k^{x^1(i)x^1(k)} & k^{x^1(i)x^2(k)} \\ k^{x^2(i)x^1(i)} & k^{x^2(i)x^2(i)} & k^{x^2(i)x^1(j)} & k^{x^2(i)x^2(j)} & k^{x^2(i)x^1(k)} & k^{x^2(i)x^2(k)} \\ k^{x^1(j)x^1(i)} & k^{x^1(j)x^2(i)} & k^{x^1(j)x^1(j)} & k^{x^1(j)x^2(j)} & k^{x^1(j)x^1(k)} & k^{x^1(j)x^2(k)} \\ k^{x^2(j)x^1(i)} & k^{x^2(j)x^2(i)} & k^{x^2(j)x^1(j)} & k^{x^2(j)x^2(j)} & k^{x^2(j)x^1(k)} & k^{x^2(j)x^2(k)} \\ k^{x^1(k)x^1(i)} & k^{x^1(k)x^2(i)} & k^{x^1(k)x^1(j)} & k^{x^1(k)x^2(j)} & k^{x^1(k)x^1(k)} & k^{x^1(k)x^2(k)} \\ k^{x^2(k)x^1(i)} & k^{x^2(k)x^2(i)} & k^{x^2(k)x^1(j)} & k^{x^2(k)x^2(j)} & k^{x^2(k)x^1(k)} & k^{x^2(k)x^2(k)} \end{bmatrix} \quad (7-61)$$

حيث:

$$c = \frac{Et}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{4A}$$

$$k^{x^1(i)x^1(i)} = \left[ (x^2_{(j)(k)})^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot (x^1_{(k)(j)})^2 \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(i)x^1(i)} = \left[ \nu \cdot x^1_{(k)(j)} \cdot x^2_{(j)(k)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^2_{(j)(k)} \cdot x^1_{(k)(j)} \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(i)x^2(i)} = \left[ (x^1_{(k)(j)})^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot (x^2_{(j)(k)})^2 \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(j)x^1(i)} = \left[ x^2_{(k)(j)} \cdot x^2_{(j)(k)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^1_{(i)(k)} \cdot x^1_{(k)(j)} \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(j)x^2(i)} = \left[ \nu \cdot x^2_{(k)(i)} \cdot x^1_{(k)(j)} + \frac{1-\nu}{2} \cdot x^1_{(i)(k)} \cdot x^2_{(j)(k)} \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(j)x^1(j)} = \left[ (x^2_{(k)(i)})^2 + \frac{1-\nu}{2} \cdot (x^1_{(i)(k)})^2 \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(i)x^1(i)} = \left[ v \cdot x^1(i)(k) \cdot x^2(j)(k) + \frac{1-v}{2} \cdot x^2(k)(i) \cdot x^1(k)(j) \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(j)x^2(i)} = \left[ x^1(i)(k) \cdot x^1(k)(j) + \frac{1-v}{2} \cdot x^2(k)(i) \cdot x^2(j)(k) \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(j)x^1(j)} = \left[ v \cdot x^1(i)(k) \cdot x^2(k)(i) + \frac{1-v}{2} \cdot x^2(k)(i) \cdot x^1(i)(k) \right] \cdot c$$

$$k^{x^2(i)x^2(j)} = \left[ (x^1(i)(k))^2 + \frac{1-v}{2} \cdot (x^2(k)(i))^2 \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(k)x^1(i)} = \left[ x^2(i)(j) \cdot x^2(j)(k) + \frac{1-v}{2} \cdot x^1(j)(i) \cdot x^1(k)(j) \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(k)x^2(i)} = \left[ v \cdot x^2(i)(j) \cdot x^1(k)(j) + \frac{1-v}{2} \cdot x^1(j)(i) \cdot x^2(j)(k) \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(k)x^1(j)} = \left[ x^2(i)(j) \cdot x^2(k)(i) + \frac{1-v}{2} \cdot x^1(j)(i) \cdot x^1(i)(k) \right] \cdot c \quad (7-62)$$

$$k^{x^1(k)x^2(j)} = \left[ v \cdot x^2(i)(j) \cdot x^1(i)(k) + \frac{1-v}{2} \cdot x^1(j)(i) \cdot x^2(k)(i) \right] \cdot c$$

$$k^{x^1(k)x^1(k)} = \left[ (x^2(i)(j))^2 + \frac{1-v}{2} \cdot (x^1(j)(i))^2 \right] \cdot c$$

$$\begin{aligned}
k^{x^2(k)x^1(i)} &= \left[ v \cdot x^1_{(i)(i)} \cdot x^2_{(i)(k)} + \frac{1-v}{2} \cdot x^2_{(i)(i)} \cdot x^1_{(i)(k)} \right] \cdot c \\
k^{x^2(k)x^1(i)} &= \left[ x^1_{(i)(i)} \cdot x^1_{(i)(k)} + \frac{1-v}{2} \cdot x^2_{(i)(i)} \cdot x^2_{(i)(k)} \right] \cdot c \\
k^{x^2(k)x^1(i)} &= \left[ v \cdot x^1_{(i)(i)} \cdot x^2_{(i)(k)} + \frac{1-v}{2} \cdot x^2_{(i)(i)} \cdot x^1_{(i)(k)} \right] \cdot c \\
k^{x^2(k)x^2(i)} &= \left[ x^1_{(i)(i)} \cdot x^1_{(i)(k)} + \frac{1-v}{2} \cdot x^2_{(i)(i)} \cdot x^2_{(i)(k)} \right] \cdot c \\
k^{x^2(k)x^1(k)} &= \left[ v \cdot x^1_{(i)(i)} \cdot x^2_{(i)(i)} + \frac{1-v}{2} \cdot x^2_{(i)(i)} \cdot x^1_{(i)(i)} \right] \cdot c \\
k^{x^2(k)x^2(k)} &= \left[ (x^1_{(i)(i)})^2 + \frac{1-v}{2} \cdot (x^2_{(i)(i)})^2 \right] \cdot c
\end{aligned}$$

والعلاقة السابقة تمثل عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة القساوة بالإضافة إلى العناصر الواقعة تحسب القطر الرئيسي، والعناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي تؤخذ بالتناظر.

تنتج القوى المركزة على العقد والمكافئة لحمولة موزعة من تقييم تعبير الحد الثاني من العلاقة (43-7). في الحالة العامة يمكن أن تكون الحمولات الخارجية  $\bar{f}^1$  تابعة للإحداثيات المستقلة  $x^1, x^2$  وغير موزعة بانتظام. في هذه الحالة يمكن استخدام صيغة التوابيع التقريبية أيضاً لتقريب تابع الحملولة.

لنفرض أن قيم توابيع الحملولة الخارجية  $\bar{f}^1$  على العقد (i) ، (j) ، (k) هي على الترتيب  $\bar{f}^1_{(i)}, \bar{f}^1_{(j)}, \bar{f}^1_{(k)}$  ، وهي بالطبع قيمتين على كل عقدة، واحدة في اتجاه  $x^1$  والأخرى في اتجاه  $x^2$  . عندها يمكن استخدام نفس الصيغة المشابهة للتوابيع التقريبية للانتقالات (52-7) لتقريب تابع الحملولة:

$$\bar{f}^1 = N^{(q)} \cdot \bar{f}^1_{(q)} \quad (7-63)$$

ويصبح الحد الثاني من (43-7) كما يلي:

$$\begin{aligned}\pi_a &= -\int_A \bar{f}^i \cdot u_i \cdot dA = \bar{f}^i_{(q)} \left( \int_A N^{(q)} \cdot N^{(p)} \cdot dA \right) \cdot u_{i(p)} \\ &= \bar{f}^i_{(q)} \cdot c^{(q)(p)} \cdot u_{i(p)} = \bar{f}^i_{(p)} \cdot u_{i(p)}\end{aligned}\quad (7-64)$$

والقوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولات الموزعة هي:

$$\bar{f}^i_{(p)} = \bar{f}^i_{(q)} \cdot c^{(q)(p)} \quad (7-65)$$

حيث:

$$c^{(q)(p)} = \int_A N^{(q)} \cdot N^{(p)} \cdot dA = \int_A N^{(q)} \cdot N^{(p)} \cdot dx^1 \cdot dx^2 \quad (7-66)$$

إذا لابد لحساب القوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة من إجراء التكامل السابق على سطح المثلث. ولتسهيل إجراء هذه التكاملات يمكن إجراء انسحاب للمحاور الإحداثية بحيث يصبح مركزها منطبقاً على مركز ثقل المثلث. ففي هذه الحالة يكون:

$$\frac{x^1_{(i)} + x^1_{(j)} + x^1_{(k)}}{3} = \frac{x^2_{(i)} + x^2_{(j)} + x^2_{(k)}}{3} = 0 \quad (7-68)$$

وتتحقق علاقات التكامل التالية على سطح المثلث:

$$\begin{aligned}\int dx^1 \cdot dx^2 &= A \quad (\text{مساحة المثلث}) \\ \int x^1 \cdot dx^1 \cdot dx^2 &= \int x^2 \cdot dx^1 \cdot dx^2 = 0 \\ \int (x^1)^2 \cdot dx^1 \cdot dx^2 &= \frac{A}{12} \cdot ((x^1_{(i)})^2 + (x^1_{(j)})^2 + (x^1_{(k)})^2)\end{aligned}\quad (7-69)$$

$$\int (x^2)^2 \cdot dx^1 \cdot dx^2 = \frac{A}{12} \cdot ((x^2_{(i)})^2 + (x^2_{(j)})^2 + (x^2_{(k)})^2)$$

$$\int x^1 \cdot x^2 \cdot dx^1 \cdot dx^2 = \frac{A}{12} \cdot (x^1_{(i)} \cdot x^2_{(i)} + x^1_{(j)} \cdot x^2_{(j)} + x^1_{(k)} \cdot x^2_{(k)})$$

والتكاملات المعطاة في العلاقة السابقة والتي سيكتفى بإعطائها دون برهان تمسوي على كسل التكاملات التي تظهر في العلاقة (7-66).

تحتوي المصفوفة  $c^{(q)(p)}$  على تسع عناصر وهي:

$$c^{(q)(p)} = \begin{bmatrix} c^{(i)(i)} & c^{(i)(j)} & c^{(i)(k)} \\ c^{(j)(i)} & c^{(j)(j)} & c^{(j)(k)} \\ c^{(k)(i)} & c^{(k)(j)} & c^{(k)(k)} \end{bmatrix} = \frac{2A}{24} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7-70)$$

لإيجاد عناصر المصفوفة السابقة من قبل القارئ يمكن الاستفادة من بعض الاختصارات والتسهيلات ملخصة في العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} a_i &= x_{(j)}^1 x_{(k)}^2 - x_{(k)}^1 x_{(j)}^2; a_j = x_{(k)}^1 x_{(i)}^2 - x_{(i)}^1 x_{(k)}^2; a_k = x_{(i)}^1 x_{(j)}^2 - x_{(j)}^1 x_{(i)}^2 \\ b_i &= x_{(j)}^2 - x_{(k)}^2; b_j = x_{(k)}^2 - x_{(i)}^2; b_k = x_{(i)}^2 - x_{(j)}^2 \\ c_i &= x_{(k)}^1 - x_{(j)}^1; c_j = x_{(i)}^1 - x_{(k)}^1; c_k = x_{(j)}^1 - x_{(i)}^1 \\ 2A &= a_i + b_i x_{(i)}^1 + c_i x_{(i)}^2 = a_j + b_j x_{(j)}^1 + c_j x_{(j)}^2 = a_k + b_k x_{(k)}^1 + c_k x_{(k)}^2 \\ a_m &= \frac{2}{3} A; m = i, j, k \end{aligned} \quad (7-71)$$

$$\begin{aligned} b_m x_{(m)}^1 + c_m x_{(m)}^2 &= \frac{4}{3} A \quad \text{if } m=n \\ &= -\frac{2}{3} A \quad \text{if } m \neq n \quad ; m, n = i, j, k. \end{aligned}$$

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها الحمولة الخارجية  $\bar{f}^i$  في العلاقة (7-63) موزعة بانتظام وشدها بالتالي على كل عقدة ثابتة ومساوية لـ  $\bar{f}^i$  تصبح القوى الخارجية المركزة على عقد العناصر والمكافئة للحمولة الموزعة (العلاقة (7-65)) بالشكل:

$$\bar{f}^{(p)} = \bar{f}^i(q) \cdot \frac{A}{3} \cdot \delta(q)(p) \quad (7-72)$$

أي أن القوة الموزعة بانتظام على كامل السطح تتوزع بالتساوي على العقد الثلاثة ومقدار القوة المركزة على كل عقدة يكون مساويا لثلث شدة القوة الموزعة مضروباً بمساحة سطح المثلث. يتم الجمع على كامل المنشأ بعد تحويل تمايز طاقة تنشوء الداخلية وعمل القوى الخارجية إلى جملة الإحداثيات العامة وذلك بعد وضع العلاقة التي تربط الانتقالات المنسوبة إلى الإحداثيات الخاصة بالعنصر والانتقالات المنسوبة إلى جملة الإحداثيات العامة. وهذه العلاقة بسيطة واستنتاجها سهل ولا داعي للمحوض فيه.

## معالجة التأثيرات الحرارية

تحصل بنتيجة التغيرات الحرارية تشوهات في مستوى الشريحة. وفي التغيرات العادية لدرجة الحرارة يمكن أن نفترض أن التشوهات تتناسب طردياً مع تغيرات درجة الحرارة. وباعتبار أنه في دراستنا اقتصرنا على دراسة المادة المتجانسة فإن التشوه الحراري هو واحد في كل الاتجاهات ومقتداره  $\alpha \cdot \Delta T$  حيث  $\alpha$  معامل التمدد الحراري و  $\Delta T$  التغير الحراري الحاصل.

وهذا تصبح علاقات التشوهات-الإجهادات للحالة الفراغية:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_1x_1} &= \frac{1}{E}[\sigma_{x_1x_1} - \nu(\sigma_{x_2x_2} + \sigma_{x_3x_3})] + \alpha \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{x_2x_2} &= \frac{1}{E}[\sigma_{x_2x_2} - \nu(\sigma_{x_1x_1} + \sigma_{x_3x_3})] + \alpha \cdot \Delta T \quad \dots \quad (7.73) \\ \varepsilon_{x_3x_3} &= \frac{1}{E}[\sigma_{x_3x_3} - \nu(\sigma_{x_1x_1} + \sigma_{x_2x_2})] + \alpha \cdot \Delta T\end{aligned}$$

ووفق هذه العلاقات لا تتغير الاتجاهات الرئيسية والتشوهات الرئيسية الحاصلة في المكعب التفاضلي.

في الحقيقة إن الحقل الحراري  $T(x^1, x^2, x^3, t)$  يؤثر في الحالة الإجهادية وحالة التشوهات الحاصلة في جزء من منشأ في اللحظة  $t$ . وكذلك الأمر تؤثر حقول الإجهادات والتشوهات الحاصلة في جزء المنشأ المدروس على توزيع الحقل الحراري. وهذا التأثير المتبادل بين الحقل الحراري وحقول التشوهات والإجهادات يصبح مهما في حالة حصول تشوهات وإجهادات كبيرة جداً. أما في المسائل العملية العادية فإنه يمكن إهمال التغيرات الحرارية الناتجة عن إجهاد المنشأ أو تشغيل المنشأ على الحمولات العادية. ويبقى تأثير التغيرات الحرارية غير المنبئة من المادة المتشوهة. ولهذا الحالة نفترض أن الحقل الحراري معطى بواسطة القياسات ويعامل معاملة الحمولات المعطاة. أما بالنسبة لتشوهات القص والتي تعبر عن التغير الزاوي بين ليفين متعامدين فيفترض أنه ليس هناك تداخل بين تشوه القص والتشوهات الناعمة. أي أن التأثير الحراري كـتأثير مسبق لا يبدل الزاوية بين ليفين متعامدين من المادة والليفان المذكوران يبقيان بعد تعرضهما للتشوه الحراري المسبق



متعامدان وإنما يحصل مثل هذا التغير لاحقاً مُسبباً من الاجهادات الناتجة عن التشنؤ الحراري، ولذلك تبقى علاقات التشوهات-الاجهادات والخاصة بتشوهات القص نفس العلاقات السابقة دون تغير. أي:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{x_1x_1} &= \frac{\sigma^{x_1x_1}}{G} \\ 2\varepsilon_{x_2x_2} &= \frac{\sigma^{x_2x_2}}{G} ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ 2\varepsilon_{x_3x_3} &= \frac{\sigma^{x_3x_3}}{G} \end{aligned} \quad (7.74)$$

إذا لا تؤثر التشوهات الحرارية المسبقة للمادة المتغيرة في التغير الزاوي، بين ليفين متعامدين. والعلاقات السابقة تمثل قانون هوك للحالة الإجهادية الفراغية. بجمع العلاقات الثلاثة الأولى نحصل على:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1-2\nu}{E} \cdot s + 3\alpha \cdot \Delta T \\ e &= \varepsilon_{x_1x_1} + \varepsilon_{x_2x_2} + \varepsilon_{x_3x_3} \\ s &= \sigma^{x_1x_1} + \sigma^{x_2x_2} + \sigma^{x_3x_3} \end{aligned} \quad (7.75)$$

إذا ما أدخلنا المعامل  $k$  والمسمى بمعامل الانضغاط بالشكل:

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2(1+\nu) \cdot G}{3(1-2\nu)} \quad (7.76)$$

يمكن أن نكتب:

$$e = \frac{s}{3k} + 3\alpha \cdot \Delta T \quad (7.77)$$

قانون هوك يمكن صياغته أيضاً باستخدام المعامل  $G$  بالشكل:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma^{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \cdot s \cdot \delta_{ij} \right] + \alpha \cdot \Delta T \cdot \delta_{ij} \quad (7.78)$$

وهذه الصياغة هي الصياغة التقليدية لقانون السلوك.

يمكن عكس هذه المعادلات لنحصل على:

$$\sigma_{kl} = 2G[\varepsilon_{kl} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot e \cdot \delta_{kl} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \delta_{kl}] \quad (7.79)$$

وهذه الصيغ مستخدمة في بعض المراجع إضافة إلى الصيغ التي درسناها أثناء دراسة قانون السلوك والتي استخدمت فيها ثوابت Lam :

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.80)$$

إذا نستنتج مما سبق أنه لاعتبار تأثير الحرارة كحمولة خارجية نفترض أن التشوه الحراري الحاصل هو تشوه معطى أو بالأحرى تشوه مسبق . ويكون التشوه الكلي مساوياً للتشوه الداخلي الحاصل نتيجة تأثير القوى الداخلية  $\varepsilon_{ij}$  والتشوه المسبق الحاصل نتيجة التشوهات الحرارية  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  وتكون الطاقة الكامنة للجسملة:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}) \cdot c^{ijkl} \cdot (\varepsilon_{kl} - \bar{\varepsilon}_{kl}) \cdot dV - \int_V \bar{f}^i \cdot u_i \cdot dV - \int_{S_0} \bar{T}^i \cdot u_i \cdot ds \quad (7.81)$$

والمتميز الأول للطاقة الكامنة باعتبار المقادير والتي عليها - معطاة هو:

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \frac{1}{2} \int_V \delta\varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \bar{\varepsilon}_{kl}) dV + \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}) \cdot c^{ijkl} \cdot \delta\varepsilon_{kl} \cdot dV \\ &\quad - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{S_0} \bar{T}^i \delta u_i ds = 0 \end{aligned} \quad (7.82)$$

وباعتبار تناظر موتر التشوهات الداخلية والناجمة أيضاً عن التأثيرات الحرارية يكون:

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \int_V \delta\varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot dV - \int_V \delta\varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl} \cdot \bar{\varepsilon}_{kl} \cdot dV \\ &\quad - \int_V \bar{f}^i \cdot \delta u_i \cdot dV - \int_{S_0} \bar{T}^i \cdot \delta u_i \cdot ds = 0 \end{aligned} \quad (7.83)$$

إذا تساهم التأثيرات الحرارية في الحمولة الخارجية عبر الحد الثاني من العلاقة السابقة. ولاعتبار هذه التأثيرات لابد من تقييم الحد للذكور

$$T_i = \int_V \delta\varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl} \cdot \bar{\varepsilon}_{kl} \cdot dV \quad (7.84)$$

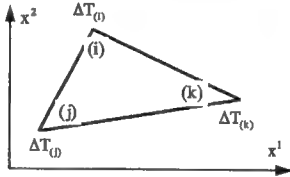
لنعتبر الآن أن التوزع الحراري منتظم على مماسكة الشريحة فيصبح التكامل السابق:

$$T_1 = \int_A \delta \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \bar{\varepsilon}_{kl} \cdot dA \quad (7.85)$$

$\delta \varepsilon_{ij}$  كنا قد حسبناها سابقاً بدلالة مشتقات توابع الشكل :

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (N^{(p)}_{,j} \cdot \delta u_{i(p)} + N^{(p)}_{,i} \cdot \delta u_{j(p)}) \quad (7.86)$$

ولنحسب الآن  $\bar{\varepsilon}_{kl}$ . لنفترض أنه في معطيات المسألة قد وصف تغير الحقل الحراري بقياس تغير درجة الحرارة على عقد الشريحة. على العنصر المنتهي ذو العقد (i),(j),(k) كانت تغيرات درجات الحرارة المقاسة  $\Delta T_{(i)}, \Delta T_{(j)}, \Delta T_{(k)}$  على الترتيب. باعتبار أن التشوه يهمنا في نقطة ما



شكل 7-10: تغيرات درجات الحرارة على عقد العنصر المنتهي

لا على التعيين من مستوي العنصر يمكن أن نستخدم مسودة التوابع التقريبية المستخدمة للاتقالات في تقريب تابع التغيرات الحرارية. إذا تغير درجة الحرارة في نقطة ما لأعلى التعيين يعطى بالشكل:

$$\Delta T = N^{(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \quad (7.87)$$

وبالتالي يكون حقل التشوهات المسبقة الناتجة عن تأثير تغير درجة الحرارة:

$$\bar{\varepsilon}_{kl} = \alpha \cdot \Delta T = \alpha \cdot N^{(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \cdot \delta_{kl} \quad \text{if } k \neq l \quad (7.88)$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl} \neq 0$$

ويصبح التكامل السابق كالتالي:

$$T_1 = \frac{1}{2} \delta u_{I(p)} \int_{\Lambda} N^{(p)}_{,j} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \alpha \cdot N^{(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \cdot \delta_{ij} \cdot dA \\ + \frac{1}{2} \delta u_{J(p)} \int_{\Lambda} N^{(p)}_{,i} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \alpha \cdot N^{(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \cdot \delta_{ij} \cdot dA = \frac{1}{2} \delta u_{I(p)} \cdot \bar{f}_{\Delta T}^{I(q)} + \frac{1}{2} \delta u_{J(p)} \cdot \bar{f}_{\Delta T}^{J(q)} \quad (7.89)$$

والحمولة المركزة على عقد العنصر وللكافة للتأثير الحراري تعطى بالشكل:

$$\bar{f}_{\Delta T}^{I(q)} = \frac{1}{2} \bar{f}_{\Delta T}^{I(q)} + \frac{1}{2} \bar{f}_{\Delta T}^{J(q)} = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Lambda} N^{(p)}_{,j} \cdot \alpha t \cdot c^{ijkl} \cdot \delta_{ij} \cdot N^{(q)} \cdot dA \right] \cdot \Delta T_{(q)} \\ + \frac{1}{2} \left[ \int_{\Lambda} N^{(p)}_{,i} \cdot \alpha t \cdot c^{ijkl} \cdot \delta_{ij} \cdot N^{(q)} \cdot dA \right] \cdot \Delta T_{(q)} = c^{i(p)X(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \quad (7.90)$$

سوف نقوم الآن بتقييم التعبير  $T_1$  باستخدام الشكل المصفوي.

لنصيغ الآن التشوهات للسبقة بالشكل المصفوي التالي:

$$\bar{\epsilon}_{kl} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{x^1x^1} \\ \bar{\epsilon}_{x^1x^2} \\ \bar{\epsilon}_{x^2x^1} \\ \bar{\epsilon}_{x^2x^2} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} N^{(I)} & N^{(J)} & N^{(K)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N^{(I)} & N^{(J)} & N^{(K)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T_{(I)} \\ \Delta T_{(J)} \\ \Delta T_{(K)} \end{bmatrix} \quad (7.91)$$

وكما نعلم فإن  $C^{ijkl}$  معطاة بالعلاقة:

$$c^{ijkl} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

و  $\delta \epsilon_{ij}$  هي:

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{x^1 x^1} \\ \delta \varepsilon_{x^1 x^2} \\ \delta \varepsilon_{x^2 x^1} \\ \delta \varepsilon_{x^2 x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} x^2_{(0)(0)} & 0 & x^2_{(0)(1)} & 0 & x^2_{(0)(2)} & 0 \\ \frac{1}{2} x^1_{(1)(0)} & \frac{1}{2} x^2_{(0)(0)} & \frac{1}{2} x^1_{(1)(1)} & \frac{1}{2} x^2_{(0)(1)} & \frac{1}{2} x^1_{(1)(2)} & \frac{1}{2} x^2_{(0)(2)} \\ \frac{1}{2} x^1_{(2)(0)} & \frac{1}{2} x^2_{(0)(0)} & \frac{1}{2} x^1_{(2)(1)} & \frac{1}{2} x^2_{(0)(1)} & \frac{1}{2} x^1_{(2)(2)} & \frac{1}{2} x^2_{(0)(2)} \\ 0 & x^1_{(0)(0)} & 0 & x^1_{(0)(1)} & 0 & x^1_{(0)(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_{x^1(0)} \\ \delta u_{x^2(0)} \\ \delta u_{x^1(1)} \\ \delta u_{x^2(1)} \\ \delta u_{x^1(2)} \\ \delta u_{x^2(2)} \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

نقيم أولا الجداء  $\delta \varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl}$  لنحصل على:

$$\delta \varepsilon_{ij} \cdot c^{ijkl} = \begin{bmatrix} \delta u_{x^1(0)} & \delta u_{x^2(0)} & \delta u_{x^1(1)} & \delta u_{x^2(1)} & \delta u_{x^1(2)} & \delta u_{x^2(2)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x^2_{(0)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(0)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(0)(1)} & \nu x^2_{(0)(1)} & x^2_{(0)(2)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(0)(2)} \\ \nu x^1_{(0)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(0)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(0)(1)} & x^1_{(0)(1)} & \nu x^1_{(0)(2)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(0)(2)} \\ x^2_{(1)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(1)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(1)(1)} & \nu x^2_{(1)(1)} & x^2_{(1)(2)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(1)(2)} \\ \nu x^1_{(1)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(1)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(1)(1)} & x^1_{(1)(1)} & \nu x^1_{(1)(2)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(1)(2)} \\ x^2_{(2)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(2)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(2)(1)} & \nu x^2_{(2)(1)} & x^2_{(2)(2)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^1_{(2)(2)} \\ \nu x^1_{(2)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(2)(0)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(2)(1)} & x^1_{(2)(1)} & \nu x^1_{(2)(2)} & \frac{1}{2}(1-\nu)x^2_{(2)(2)} \end{bmatrix} \quad (7.94)$$

وفي النهاية يكون الحد  $T_1$  بالشكل:

$$\int_A \delta \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \bar{\varepsilon}_{kl} \cdot dA = \begin{bmatrix} \delta u_{x^1(0)} & \delta u_{x^2(0)} & \delta u_{x^1(1)} & \delta u_{x^2(1)} & \delta u_{x^1(2)} & \delta u_{x^2(2)} \end{bmatrix} \cdot \left( \int_A \frac{t}{2A} \cdot \begin{bmatrix} (1+\nu)x^2_{(0)(0)}N^{(0)} & (1+\nu)x^2_{(0)(1)}N^{(0)} & (1+\nu)x^2_{(0)(2)}N^{(0)} \\ (1+\nu)x^1_{(1)(0)}N^{(0)} & (1+\nu)x^1_{(1)(1)}N^{(0)} & (1+\nu)x^1_{(1)(2)}N^{(0)} \\ (1+\nu)x^2_{(1)(0)}N^{(0)} & (1+\nu)x^2_{(1)(1)}N^{(0)} & (1+\nu)x^2_{(1)(2)}N^{(0)} \\ (1+\nu)x^1_{(2)(0)}N^{(0)} & (1+\nu)x^1_{(2)(1)}N^{(0)} & (1+\nu)x^1_{(2)(2)}N^{(0)} \\ (1+\nu)x^2_{(2)(0)}N^{(0)} & (1+\nu)x^2_{(2)(1)}N^{(0)} & (1+\nu)x^2_{(2)(2)}N^{(0)} \\ (1+\nu)x^1_{(0)(0)}N^{(1)} & (1+\nu)x^1_{(0)(1)}N^{(1)} & (1+\nu)x^1_{(0)(2)}N^{(1)} \end{bmatrix} dA \right) \begin{bmatrix} \Delta T_{(0)} \\ \Delta T_{(1)} \\ \Delta T_{(2)} \end{bmatrix} \\ = \delta u_{l(p)} \cdot c^{l(p)(q)} \cdot \Delta T_{(q)} \quad (7.95)$$

والمصنوفة  $c^{l(p)(q)}$  تعطي بعد إنجاز التكامل السابق بفرض أن مركز الإحداثيات ينطبق على

مركز ثقل المثلث وبعد الانتباه إلى تماثل  $a_1, a_2, a_3$ :

$$c^{i(p)(q)} = \frac{E \alpha t}{6(1-\nu)} \begin{bmatrix} x^2_{(D)(k)} & x^2_{(D)(k)} & x^2_{(D)(k)} \\ x^1_{(k)(D)} & x^1_{(k)(D)} & x^1_{(k)(D)} \\ x^2_{(k)(D)} & x^2_{(k)(D)} & x^2_{(k)(D)} \\ x^1_{(D)(k)} & x^1_{(D)(k)} & x^1_{(D)(k)} \\ x^2_{(D)(D)} & x^2_{(D)(D)} & x^2_{(D)(D)} \\ x^1_{(D)(D)} & x^1_{(D)(D)} & x^1_{(D)(D)} \end{bmatrix} \quad (7.96)$$

ويمكن أيضا استخدام طريقة فك التعبير  $T_1$  للحصول على حدوده فردى .

#### حالة هبوط المساند أو الانتقالات المسبقة:

من حالات التحميل الخارجية والتي تؤدي إلى نشوء قوى في المنشآت هي حالات هبوط المساند أو حالة وجود انتقالات مسبقة. لنفرض أنه حصل في بعض نقاط المنشأ انتقالات مسبقة، ففي هذه الحالة نقسم شعاع الانتقالات النهائي الكلي  $u$  إلى مجموع شعاعين شعاع الانتقالات الحاصل دون وجود الانتقالات المسبقة  $u_{\bar{m}(n')}$  وشعاع الانتقالات المسبقة  $\bar{u}_{\bar{m}(n')}$  ويكون تعبير الطاقة الكامنة الكلي للمنشأ كما يلي:

$$\pi = \frac{1}{2} (u_{\bar{T}(n)} + \bar{u}_{\bar{T}(n)}) k^{\bar{T}(n)\bar{m}(n')} (u_{\bar{m}(n')} + \bar{u}_{\bar{m}(n')}) - \bar{f}^{\bar{T}(n)} (u_{\bar{T}(n)} + \bar{u}_{\bar{T}(n)}) \quad (7.97)$$

$$\bar{m}, \bar{T} = x^{\bar{T}}, x^{\bar{T}}, \quad (n), (n') = 1, 2, 3 \quad \text{عدد عقد للمنشأ}$$

والتغير الأول للطاقة الكامنة هو:

$$\delta \pi = \delta u_{\bar{T}(n)} [k^{\bar{T}(n)\bar{m}(n')} (u_{\bar{m}(n')} + \bar{u}_{\bar{m}(n')}) - \bar{f}^{\bar{T}(n)}] = 0 \quad (7.98)$$

وذلك لأن التغير الأول للانتقالات المسبقة المعلومة ( $\delta u_{\bar{T}(n)} = 0$ ) مساو للصفر وتصبح جملة المعادلات الخطية بالشكل:

$$k^{\bar{T}(n)\bar{m}(n')} u_{\bar{m}(n')} = -k^{\bar{T}(n)\bar{m}(n')} \bar{u}_{\bar{m}(n')} + \bar{f}^{\bar{T}(n)} \quad (7.99)$$

أي أن تأثير هبوط المساند أو الانتقالات المسبقة ممثل في الطرف الأيمن بالجداء  $\bar{u}_{\#(p)}^{T(n)\#(n)} - k$  وهو حاصل جداء مصفوفة القساوة العامة في شعاع الانتقالات المسبقة. فلذا كان الانتقال المسبق قد حدث على عدد محدود من العقد فإن الجداء السابق ممثل بجداء الأعمدة من مصفوفة القساوة العامة الموافقة لأرقام العقد التي حصل فيها الانتقال مضروباً في الانتقال المسبق نفسه.

### معالجة النابض

في حالة وجود نابض ثابت صلابته  $c$  يسند عقدة ما  $(p)$  من الشريحة في اتجاه ما تكون الطاقة الداخلية المتولدة عن قوى مرونة النابض والناجمة عن انتقال العقدة  $(i)$  بالاتجاه بالمقدار  $u_{(p)}$ :

$$\pi_s = \frac{1}{2} u_{(p)} \cdot c \cdot u_{(p)} \quad (7.100)$$

هذه الطاقة يجب تحويلها بدلالة انتقالات العقدة  $(p)$  باتجاه المحاور الإحداثية العامة قبل إضافتها إلى تابع الطاقة الكامنة. لنفترض أن  $u_{(p)}$  ترتبط مع الانتقالات باتجاه المحاور الإحداثية العامة بعلاقة التحويل:

$$u_{(p)} = T^T \cdot u_{T(p)} \quad (7.101)$$

هذا نحصل على:

$$\pi_s = \frac{1}{2} u_{T(p)}^T T^T c T u_{\#(p)} \quad (7.102)$$

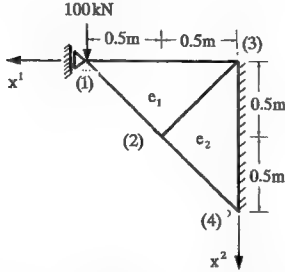
إذا نضيف المقدار  $T^T c T$  في المكان الموافق للعقدة  $(p)$  المسندة بالنابض.

أما القوة المحورية في النابض فيتم حسابها بعد حساب الانتقالات المجهولة بحساب انتقال العقدة  $(p)$  باتجاه محور النابض وفق علاقة التحويل الواردة أعلاه ومن ثم نحسب القوة في النابض بالعلاقة المعروفة:

$$N_{(p)} = -c \cdot u_{(p)} \quad (7.103)$$

### مثال 7-1

لدينا شريحة مثلثية قائمة أبعادها وخواصها الهندسية بالإضافة إلى تقسيمها إلى عناصر منتهية وترقيم عقد عناصرها مبنية على الشكل م7-1. إذا خضعت الشريحة لقوة شاقولية مقدارها 100 kN في العقدة (1) والمطلوب في جملة المحاور الإحداثية  $x^1 x^2$  :



$$E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2; t = 0.2 \text{ m}; \nu = 0.3$$

شكل م7-1: شريحة مثلثية ، المحاور الإحداثية ، الأبعاد والخواص الهندسية ، الحمولة

1- حساب انتقالات العقد.

2- حساب ردود الأفعال وتمثيلها على الشكل.

3- تحديد حالة التشوهات والإجهادات في

العنصرين  $e_1, e_2$  .

4- حساب الطاقة الكامنة للمحملة.

الحل:

1- حساب انتقالات العقد:

حساب ثابت مصفوفة القساوة :

$$C = \frac{2.1 \times 10^7 \times 0.2}{1 - 0.09} \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{1 \times 0.5}{2}} = 4615384.615$$

حساب مصفوفة القساوة:



العنصر  $e_1$  :

نرقم عقد العنصر وفق الترتيب التالي:

$$(i)=(1) \quad (j)=(2) \quad (k)=(3)$$

فتكون فروقات إحداثيات العقد كما يلي:

$$\begin{aligned} x^1_{(i)(j)} &= 0.5 & x^2_{(i)(j)} &= -0.5 \\ x^1_{(j)(k)} &= 0.5 & x^2_{(j)(k)} &= 0.5 \\ x^1_{(k)(i)} &= -1 & x^2_{(k)(i)} &= 0 \end{aligned}$$

وعليه نحسب مصفوفة القساوة للعنصر الأول بالشكل:

$$K_{e_1} = 4615384.615 \begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 \\ -0.175 & 0.175 & 0.35 & 0 & -0.175 & -0.175 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1 & -0.15 & -0.5 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.175 & -0.15 & 0.3375 & 0.1625 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.175 & -0.5 & 0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

العنصر  $e_2$  :

وبشكل مماثل نحصل في العنصر الثاني على:

$$(i)=(3) \quad (j)=(2) \quad (k)=(4)$$

$$\begin{aligned} x^1_{(i)(j)} &= -0.5 & x^2_{(i)(j)} &= -0.5 \\ x^1_{(j)(k)} &= 0.5 & x^2_{(j)(k)} &= -0.5 \\ x^1_{(k)(i)} &= 0 & x^2_{(k)(i)} &= 1 \end{aligned}$$

$$K_{e_2} = 4615384.615 \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.1625 & -0.5 & -0.175 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.1625 & 0.3375 & -0.15 & -0.175 & -0.0125 & -0.1625 \\ -0.5 & -0.15 & 1 & 0 & -0.5 & 0.15 \\ -0.175 & -0.175 & 0 & 0.35 & 0.175 & -0.175 \\ 0.1625 & -0.0125 & -0.5 & 0.175 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0.0125 & -0.1625 & 0.15 & -0.175 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

وبعد التجميع نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$4615384.615 \begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 & 0 & 0 \\ -0.175 & 0.175 & 1.35 & 0 & -0.675 & -0.325 & -0.5 & 0.15 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1.35 & -0.325 & -0.675 & 0.175 & -0.175 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.675 & -0.325 & 0.75 & 0.325 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.325 & -0.675 & 0.325 & 0.75 & -0.0125 & -0.1625 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.175 & 0.1625 & -0.0125 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.175 & 0.0125 & -0.1625 & 0.3375 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2(1)} \\ u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \\ u_{1(3)} \\ u_{2(3)} \\ u_{1(4)} \\ u_{2(4)} \\ u_{2(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{(1)}^x \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}_{(3)}^x \\ \bar{F}_{(3)}^y \\ \bar{F}_{(4)}^x \\ \bar{F}_{(4)}^y \end{bmatrix}$$

بتعويض الشروط الطرفية تنقلص جملة المعادلات الخطية لتصبح كما يلي :

$$4615384.615 \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.175 & -0.5 \\ 0.175 & 1.35 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{2(1)} \\ u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتكون انتقالات العقد المجهولة بالشكل :

$$u_{2(1)} = \frac{771.4285}{4395604.396} = 1.67143 \times 10^{-4}$$

$$u_{1(2)} = \frac{-100}{4395604.396} = -2.16667 \times 10^{-5}$$

$$u_{2(2)} = \frac{285.714}{4395604.396} = 6.19048 \times 10^{-5}$$

2- حساب ردود الأفعال :

يتم حساب ردود الأفعال من جملة المعادلات العامة قبل تعويض الشروط الطرفية فيها وذلك بتعويض انتقالات العقد المحسوبة من الفقرة السابقة في المعادلات المذكورة فنحصل بعد حذف العمليات الصغرية على:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{(1)}^x \\ \bar{F}_{(3)}^x \\ \bar{F}_{(3)}^y \\ \bar{F}_{(4)}^x \\ \bar{F}_{(4)}^y \end{bmatrix} = 4615384.615 \begin{bmatrix} -0.1625 & -0.175 & 0.15 \\ -0.0125 & -0.675 & -0.325 \\ 0.1625 & -0.325 & -0.675 \\ 0 & -0.5 & 0.175 \\ 0 & 0.15 & -0.175 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.67134 \times 10^{-4} \\ -2.16667 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65 \\ -35 \\ -35 \\ 100 \\ -65 \end{bmatrix}$$

3- تحديد حالة التشوهات والإجهادات:

العنصر  $e_1$  :

تُحسب في البدء مشتقات الانتقالات :

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & -2.16667 \times 10^{-5} & 0 \\ 1.67143 \times 10^{-4} & 6.19048 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4.33333 \times 10^{-5} \\ 1.67143 \times 10^{-4} & -4.33333 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

ومن ثم تُحسب التشوهات من علاقات التشوهات-الانتقالات :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 6.19048 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} & -4.33333 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

وبعدئذ نحصل على الاجهادات من قانون السلوك :

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \end{bmatrix} = \frac{2.1 \times 10^7}{1-0.09} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6.19048 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} \\ -4.3333 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 \\ 1000 \\ 1000 \\ -1000 \end{bmatrix}$$

العنصر  $e_2$  :

وبشكل مماثل نحصل في العنصر الثاني على :

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & -2.16667 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 6.19048 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.33333 \times 10^{-5} & 0 \\ 1.23808 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -4.33333 \times 10^{-5} & 6.19048 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \end{bmatrix} = \frac{2.1 \times 10^7}{1-0.09} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.33333 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ -300 \end{bmatrix}$$

5- حساب الطاقة الكامنة للحملة:

يمكن حساب الطاقة الكامنة للحملة من الصيغة التالية:

$$\pi = \sum_{e=1}^n \left( \frac{1}{2} \cdot u_{i(p)} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot u_{k(q)} - \bar{F}^{i(p)} \cdot u_{i(p)} \right)$$

لكن لدينا وفق جملة للمعادلات الخطية لانتقالات العقد :

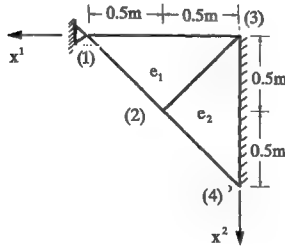
$$\sum_{e=1}^n k^{i(p)k(q)} \cdot u_{i(p)} \approx \sum_{e=1}^n \bar{F}^{i(p)}$$

وبالتالي يمكن حساب الطاقة الكامنة للحملة كالتالي :

$$\pi = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{e=1}^n u_{i(p)} \cdot \bar{F}^{i(p)} = -\frac{1}{2} \times 1.67143 \times 10^{-4} \times 100 = -8.35715 \times 10^{-3} \text{ kN.m}$$

مثال 2-7 :

لدينا شريحة مثلثية قائمة أبعادها وخواصها الهندسية وطبيعية استنادها وتقسيمها إلى عناصر منتهية مبنية على الشكل م 2-7 . بفرض أن الشريحة خضعت لتأثير تغيرات حرارية موزعة خطياً حيث كان تغير درجة الحرارة في العقدة (1) بمقدار  $100^\circ$  درجة مئوية وفي العقدتين (3) و(4) معلوم؛ المطلوب:



$$E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2; t = 0.2\text{m}; \nu = 0.3; \alpha = 0.000012$$

شكل م 2-7: شريحة مثلثية ، المحاور الإحداثية، الأبعاد والخواص الهندسية ،

الحمولة الحرارية على العقد

1- إيجاد الحالة الانتقالية في الجملة.

2- إيجاد ردود الأنفعال.

3- تحديد حالة التشوهات والحالة الاجهادية في العنصرين  $e_1, e_2$ .

الحل:

في البدء يجب حساب الحملات المركزة على العقد والمكافئة للحمل الحراري والمعطاة وفق العلاقة  
 $\bar{f}^{i(q)} = C^{i(p(q))} \Delta t_{(q)}$  . باعتبار أن الخواص الهندسية للشريحة ثابتة نحسب في البدء الثابت  
 الوارد في المصفوفة  $C^{i(p(q))}$  والمتساوي في كل عناصر الشريحة:

$$\frac{E \cdot \alpha \cdot t}{6(1-\nu)} = \frac{2.1 \times 10^7 \times 0.000012 \times 0.2}{6(1-0.3)} = 12$$

العنصر  $e_1$  : باعتبار توزع الحمل الحراري خطي تكون قيم التغيرات الحرارية في عقد العنصر  
 (1)، (2)، (3) هي على التوالي  $\Delta t_{(1)} = 100^\circ, \Delta t_{(2)} = 50^\circ, \Delta t_{(3)} = 0$  وتكون الحملات  
 المركزة في عقد العنصر والمكافئة للحملات الحرارية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}^{x^1}_{(1)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(1)} \\ \bar{f}^{x^1}_{(2)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(2)} \\ \bar{f}^{x^1}_{(3)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(3)} \end{bmatrix} = 12 \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -900 \\ -900 \\ 0 \\ 1800 \\ -900 \\ -900 \end{bmatrix}$$

العنصر  $e_2$  : هنا تكون قيم التغيرات الحرارية في عقد العنصر (3)، (2)، (4) هي على التوالي  
 $\Delta t_{(3)} = 0^\circ, \Delta t_{(2)} = 50^\circ, \Delta t_{(4)} = 0$  وعليه تكون الحملات المركزة في عقد العنصر  
 والمكافئة للحملات الحرارية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}^{x^1}_{(3)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(3)} \\ \bar{f}^{x^1}_{(2)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(2)} \\ \bar{f}^{x^1}_{(4)} \\ \bar{f}^{x^2}_{(4)} \end{bmatrix} = 12 \times \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 \\ -300 \\ 600 \\ 0 \\ -300 \\ 300 \end{bmatrix}$$

وتصبح جملة المعادلات الخطية النهائية:

$$\begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 & 0 & 0 \\ -0.175 & 0.175 & 1.35 & 0 & -0.675 & -0.325 & -0.5 & 0.15 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1.35 & -0.325 & -0.675 & 0.175 & -0.175 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.675 & -0.325 & 0.75 & 0.325 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.325 & -0.675 & 0.325 & 0.75 & -0.0125 & -0.1625 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.175 & 0.1625 & -0.0125 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.175 & 0.0125 & -0.1625 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2(1)} \\ u_{2(2)} \\ u_{2(3)} \\ u_{2(4)} \\ u_{2(5)} \\ u_{2(6)} \\ u_{2(7)} \\ u_{2(8)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ -900 \\ 600 \\ 1800 \\ -1200 \\ -1200 \\ -300 \\ 300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}^{(1)} \\ \bar{F}^{(2)} \\ \bar{F}^{(3)} \\ \bar{F}^{(4)} \\ \bar{F}^{(5)} \\ \bar{F}^{(6)} \\ \bar{F}^{(7)} \\ \bar{F}^{(8)} \end{bmatrix}$$

$$C = 4615384.615$$

بعد تعويض الشروط الطرفية نحصل على جملة المعادلتين لحساب الانتقالات المجهولة:

$$C = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 \\ 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

بالحل ينتج :

$$\begin{bmatrix} u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.629629 \times 10^{-5} \\ 2.888889 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad m$$

أما بقية الانتقالات فهي معلومة .

المعادلات الستة المتبقية تحدد ردود الأفعال . بعد استبعاد العمليات الصفرية تحسب ردود الأفعال كالتالي :

$$\begin{bmatrix} \bar{F}^{(1)} \\ \bar{F}^{(2)} \\ \bar{F}^{(3)} \\ \bar{F}^{(4)} \\ \bar{F}^{(5)} \\ \bar{F}^{(6)} \end{bmatrix} = \frac{c}{1.35} \cdot \begin{bmatrix} -0.175 & 0.15 \\ 0.175 & -0.5 \\ -0.675 & -0.325 \\ -0.325 & -0.675 \\ -0.5 & 0.175 \\ 0.15 & -0.175 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.3 \times 10^{-4} \\ 3.9 \times 10^{-4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 900 \\ -900 \\ -1200 \\ -1200 \\ -300 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -777.7778 \\ 311.1111 \\ 466.6667 \\ 155.5556 \\ 311.1111 \\ -466.6667 \end{bmatrix}$$

تحديد حالة التشوهات والحالة الإجهادية في العنصرين  $e_1, e_2$  :

العنصر  $e_1$  :

يتم حساب مشتقات الانتقالات بالطريقة العادية:

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 9.629629 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2.888889 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1 \times 0.5}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.9259258 \times 10^{-4} \\ 0 & 5.7777777 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

والآن نحسب موترتا التشوهات الداخلية والمسبقة الناتجة عن التأثير الحراري وبعد ذلك نحسب

الاجهادات من قانون السلوك المعطى لحالة التشوهات المسبقة

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 9.629629 \times 10^{-5} \\ 9.629629 \times 10^{-5} & 5.777777 \times 10^{-4} \end{bmatrix}; \epsilon_0 = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 100N^{(1)} + 50N^{(2)} & 0 \\ 0 & 100N^{(1)} + 50N^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\sigma^0 = E^0(\epsilon_0 - \bar{\epsilon}_0)$$

$$E^{[k]} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{22} \end{bmatrix} = \frac{2.1 \times 10^7}{1 - 0.09} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 9.629629 \times 10^{-5} \\ 9.629629 \times 10^{-5} \\ 5.777777 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 1555.556 \\ 1555.556 \\ 1333.333 \end{bmatrix}$$

العنصر  $e_2$  :

وبشكل مماثل نحصل في العنصر الثاني على حالي التشوهات والاجهادات التاليتين:

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 9.629629 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2.888889 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.925925 \times 10^{-4} & 0 \\ 5.777777 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 1.9259258 \times 10^{-4} & 2.8888889 \times 10^{-4} \\ 2.8888889 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix}; \epsilon_0 = \begin{bmatrix} 50N^{(2)} & 0 \\ 0 & 50N^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\sigma^0 = E^0(\epsilon_0 - \bar{\epsilon}_0)$$

$$E^{[k]} \cdot \epsilon_{ij} = \frac{2.1 \times 10^7}{1 - 0.09} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.9259258 \times 10^{-4} \\ 2.8888889 \times 10^{-4} \\ 2.8888889 \times 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4444.444 \\ 4666.667 \\ 4666.667 \\ 1333.333 \end{bmatrix}$$

نلاحظ هنا أن موترنا التشوهات والاجهادات ليستا ثابتين وإنما متعلقتان بالإحداثيات المستقلة وتوابع الشكل.

4- حساب الطاقة الكامنة:

نحسب الطاقة الكامنة في حالة وجود التشوه الحراري فقط من العلاقة التالية:

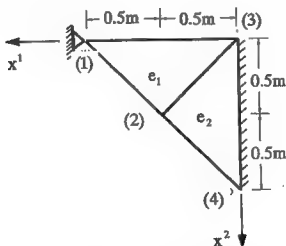
$$\pi = \sum_e \frac{1}{2} \cdot u_{i(p)} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot u_{k(q)} - u_{i(p)} \cdot c^{i(p)k(q)} \Delta T_{(q)}$$

وتطبيق هذه العلاقة بالمعطيات الرقمية للمسألة بعد استبعاد العمليات الصفرية يؤدي إلى:

$$\pi = \frac{1}{2} [9.629629 \times 10^{-5} \cdot 2.888889 \times 10^{-4}] \cdot c \cdot \begin{bmatrix} 1.35 & 0 \\ 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9.629629 \times 10^{-5} \\ 2.888889 \times 10^{-4} \end{bmatrix} - [9.62929 \times 10^{-5} \cdot 2.888889 \times 10^{-4}] \cdot \begin{bmatrix} 600 \\ 1800 \end{bmatrix} = 0.2888888 - 0.5777777 = -0.2888888$$

مثال 3-7 :

لدينا شريحة مثلثية قائمة بأبعادها وخواصها الهندسية وطبيعة استنادها وتقسيمها إلى عناصر منتهية مبنية على الشكل م3-7. إذا هبط المسند (1) باتجاه  $x^2$  مقدار 0.167143 mm، المطلوب:



$$E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2; t = 0.2\text{m}; \nu = 0.3$$

شكل م3-7: شريحة مثلثية، المحاور الإحداثية، الأبعاد والخواص الهندسية، هبوط المسند



- 1- إيجاد الحالة الانتقالية في الجملة.
- 2- إيجاد ردود الأفعال .
- 3- تحديد حالة التشوهات والحالة الإجهادية في العنصرين  $e_2, e_1$ .
- 4- حساب الطاقة الكامنة للجملة.

الحل:

1- إيجاد الحالة الانتقالية في الجملة

وجدنا أن مصفوفة القساوة للعنصر الأول معطاة بالشكل :

$$k_{e_1} = 4615384.65 \times \begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.012 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 \\ -0.175 & 0.175 & 0.35 & 0 & -0.175 & -0.175 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1 & -0.15 & -0.5 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.175 & -0.15 & 0.3375 & 0.1625 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.175 & -0.5 & 0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

وهي للعنصر الثاني كالآتي :

$$k_{e_2} = 4615384.61 \times \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.1625 & -0.5 & -0.175 & 0.1625 & 0.012 \\ 0.1625 & 0.3375 & -0.15 & -0.175 & -0.0125 & -0.1625 \\ -0.5 & -0.15 & 1 & 0 & -0.5 & 0.15 \\ -0.175 & -0.175 & 0 & 0.35 & 0.175 & -0.175 \\ 0.1625 & -0.0125 & -0.5 & 0.175 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0.0125 & -0.1625 & 0.15 & -0.175 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة القساوة الكلية بالشكل :

$$K = 4615384.61 \times \begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 & 0 & 0 \\ -0.175 & 0.175 & 0.35 & 0 & -0.675 & -0.325 & -0.5 & 0.15 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1 & -0.325 & -0.675 & 0.175 & -0.175 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.675 & -0.325 & 0.75 & 0.325 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.325 & -0.675 & 0.325 & 0.75 & -0.0125 & -0.1625 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.175 & 0.1625 & -0.0125 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.175 & -0.0125 & -0.1625 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix}$$

تجمع الانتقالات المسبقة الحاصلة في الجملة الإنشائية في شعاع الانتقالات للمسبقة:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1(1)} \\ \bar{u}_{2(1)} \\ \bar{u}_{1(2)} \\ \bar{u}_{2(2)} \\ \bar{u}_{1(3)} \\ \bar{u}_{2(3)} \\ \bar{u}_{1(4)} \\ \bar{u}_{2(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.67143 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويكون الطرف الثاني بحملة المعادلات الخطية مساوياً لحاصل ضرب مصفوفة القساوة الكلية في شعاع الانتقالات المسبقة:

$$k\bar{u} = 4615384.615 \times \begin{bmatrix} -2.71607 \times 10^{-5} \\ 5.64108 \times 10^{-5} \\ 2.925 \times 10^{-5} \\ -8.35715 \times 10^{-5} \\ -2.08929 \times 10^{-6} \\ 2.716074 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتصبح حملة المعادلات الخطية كمايلي:

$$C \begin{bmatrix} 0.3375 & -0.1625 & -0.175 & 0.15 & -0.1625 & 0.0125 & 0 & 0 \\ -0.1625 & 0.3375 & 0.175 & -0.5 & -0.0125 & 0.1625 & 0 & 0 \\ -0.175 & 0.175 & 1.35 & 0 & -0.675 & -0.325 & -0.5 & 0.15 \\ 0.15 & -0.5 & 0 & 1.35 & -0.325 & 0.675 & 0.175 & -0.175 \\ -0.1625 & -0.0125 & -0.675 & -0.325 & 0.75 & 0.325 & 0.1625 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.1625 & -0.325 & -0.675 & 0.325 & 0.75 & -0.0125 & -0.1625 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.175 & 0.1625 & -0.0125 & 0.3375 & -0.1625 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.175 & 0.0125 & -0.1625 & -0.1625 & 0.3375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1(1)} \\ u_{2(1)} \\ u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \\ u_{1(3)} \\ u_{2(3)} \\ u_{1(4)} \\ u_{2(4)} \end{bmatrix} =$$

$$-C \begin{bmatrix} -2.71607 \times 10^{-5} \\ 5.64108 \times 10^{-5} \\ 2.925 \times 10^{-5} \\ -8.35715 \times 10^{-5} \\ -2.08929 \times 10^{-6} \\ 2.716074 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}^{x^1}_{(1)} \\ \bar{F}^{x^2}_{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}^{x^1}_{(3)} \\ \bar{F}^{x^2}_{(3)} \\ \bar{F}^{x^1}_{(4)} \\ \bar{F}^{x^2}_{(4)} \end{bmatrix}$$

تقلص الشروط الطرفية جملة المعادلات السابقة إلى معادلتين مجهولين نحصل بهما على المجهولين المطلوبين:

$$C \begin{bmatrix} 1.35 & 0 \\ 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = -C \begin{bmatrix} 2.925 \times 10^{-5} \\ -8.35715 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1(2)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.16667 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

2- حساب ردود الأفعال:

بعد اختصار العمليات الصغرية تحسب ردود الأفعال من جملة المعادلات الخطية بعد تعريض الانتقالات المجهولة فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}^{x^1}_{(1)} \\ \bar{F}^{x^2}_{(1)} \\ \bar{F}^{x^1}_{(3)} \\ \bar{F}^{x^2}_{(3)} \\ \bar{F}^{x^1}_{(4)} \\ \bar{F}^{x^2}_{(4)} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -0.1625 & -0.175 & 0.15 \\ 0.3375 & 0.175 & -0.5 \\ -0.0125 & -0.675 & -0.325 \\ 0.1625 & -0.325 & -0.675 \\ 0 & -0.5 & 0.175 \\ 0 & 0.15 & -0.175 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.16667 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$+ C \begin{bmatrix} -2.71607 \times 10^{-5} \\ 5.64108 \times 10^{-5} \\ -2.08929 \times 10^{-6} \\ 2.716074 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65 \\ 100 \\ -35 \\ -35 \\ 100 \\ -65 \end{bmatrix}$$

### 3- حالة التشوهات والإجهادات:

العنصر  $e_1$  تعطي حالة تشوهات وإجهادات العنصر الأول بالشكل :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 6.19048 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} & -4.33333 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 \\ 1000 \\ 1000 \\ -1000 \end{bmatrix}$$

العنصر  $e_2$  و: حالة تشوهات وإجهادات العنصر الثاني بالشكل

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -4.33333 \times 10^{-5} & 6.19048 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ -300 \end{bmatrix}$$

### 4- حساب الطاقة الكامنة للحملة:

نحسب الطاقة الكامنة في حالة وجود هبوط المساند فقط من العلاقة التالية:

$$\pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot u_{i(p)} \cdot k^{l(p)k(q)} \cdot u_{k(q)} + u_{i(p)} \cdot k^{l(p)k(q)} \cdot \bar{u}_{k(q)}$$

وتطبيق هذه العلاقة بالمعطيات الرقمية للمسألة بعد استبعاد العمليات الصفرية يؤدي إلى:

$$\pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2.16667 \times 10^{-5} & 6.19048 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.175 & -0.5 \\ 0.175 & 1.35 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2.16667 \times 10^{-5} \\ 6.19048 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

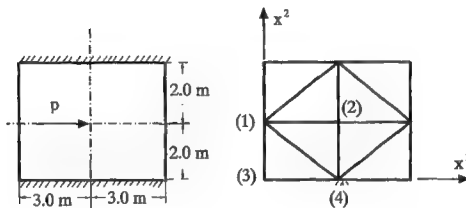
$$+ \begin{bmatrix} 0 & -2.1667 \times 10^{-5} & 6.19048 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.175 & -0.5 \\ 0.175 & 1.35 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.67143 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 8.35715 \times 10^{-3} \text{ KN.m}$$

وفيما يلي ستدرس بعض الأمثلة العددية الممكن حلها يدوياً بالاعتماد على خواص التناظر والعكسي.

#### مثال 7-4:

لدينا شريحة مستطيلة مستوية موثوقة من الطرفين وحررة في الطرفين الآخرين وأبعادها وخواصها الهندسية كما يبين الشكل م 7-4. تخضع الشريحة في مركزها لقوة أفقية والمطلوب: إيجاد انتقالات العقد الناتجة عن التقسيم الشبكي المبين عليها.



$$E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2; \nu = 0.3$$

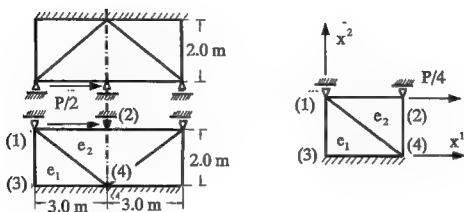
$$t = 0.10 \text{ m} \quad p = 1000 \text{ kN}$$

شكل م 7-4: المنشأ، والخواص الهندسية والتقسيم إلى عناصر منتهية

الحل:

باعتبار أن القوة الأفقية ستولد في حالتها هذه انتقالاً أفقياً فقط فيمكن دراسة نصف الشريحة عازباً لنصف القوة ونعتبر الطرف المقتطع بالتناظر مستنداً استناداً بسيطاً في الاتجاه الشاقولي لمنع حركته في ذلك الاتجاه.

ومن ثم نعود إلى دراسة ربع الشريحة خاضعة لقوة مقدارها ربع القوة الأساسية والشكل أعلاه يبين الخطوات المتخذة لتبسيط دراسة الشريحة الأساسية، بالإضافة إلى نسب العناصر إلى المحاور الإحداثية وترقيم العقد.



شكل م7-4-2: التناظروفق عطف القوة ، ربع الشريحة المدروس

يمكن الآن البدء بتشكيل مصفوفات القساوة للعناصر. فللعنصر  $e_1$  نحصل باعتبار الخواص الهندسية المابقة وباعتبار  $(i)=(3), (j)=(4), (k)=(1)$  على :

$$k_{(e_1)}^{i(p)k(q)} = 192307.7 \times \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 3.15 & 0 \\ & & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

وللعنصر  $e_2$  باعتبار  $(i)=(4), (j)=(2), (k)=(1)$  على :

$$k_{(e_2)} = 192307.7 \times \begin{bmatrix} & 7.15 & 3.9 & -4 & -2.1 \\ & 3.9 & 10.4 & -1.8 & -1.4 \\ & -4 & -1.8 & 4 & 0 \\ & -2.1 & -1.4 & 0 & 1.4 \end{bmatrix}$$

وجملة المعادلات الجبرية الخطية النهائية لانتقالات العقد تصبح من الشكل:

$$192307.7 \times \begin{bmatrix} 7.15 & 3.9 & -4 & -2.1 & * & * & * & * \\ 3.9 & 10.4 & -1.8 & -1.4 & & & & \\ -4 & -1.8 & 7.15 & 0 & & & & \\ -2.1 & -1.4 & 0 & 10.4 & & & & \\ * & & & & & & & \\ * & & & & & & & \\ * & & & & & & & \\ * & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^2(1)} \\ u_{x^1(2)} \\ u_{x^2(2)} \\ u_{x^1(3)} \\ u_{x^2(3)} \\ u_{x^1(4)} \\ u_{x^2(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}_{(3)}^{x^1} \\ \bar{F}_{(3)}^{x^2} \\ \bar{F}_{(4)}^{x^1} \\ \bar{F}_{(4)}^{x^2} \end{bmatrix}$$

حيث تشير  $\bar{F}_{(3)}^{x^1}, \bar{F}_{(3)}^{x^2}, \bar{F}_{(4)}^{x^1}, \bar{F}_{(4)}^{x^2}$  إلى ردود الأفعال المتولدة من العقدتين (3)، (4) على التوالي. بعد تعويض الشروط الطرفية للانتقالات والتي تقتضي أن يكون :

$$u_{x^1(3)} = u_{x^2(3)} = u_{x^1(4)} = u_{x^2(4)} = 0$$

وذلك بحذف الأسطر والأعمدة للموافقة لتلك الانتقالات (وللمشار إليها بنجمة) من جملة المعادلات أو بإضافة أعداد قيمها كبيرة جدا إلى عناصر القطر الرئيسي للموافقة لتلك الانتقالات في مصفوفة التسلاوة العامة، تنتقل جملة المعادلات النهائية إلى التالية:

$$192307.7 \times \begin{bmatrix} 7.15 & 3.9 & -4 & -2.1 \\ 3.9 & 10.4 & -1.8 & -1.4 \\ -4 & -1.8 & 7.15 & 0 \\ -2.1 & -1.4 & 0 & 10.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^2(1)} \\ u_{x^1(2)} \\ u_{x^2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالإضافة إلى التبسيطات السابقة يمكن استخدام خاصية التناظر أيضا لتبسيط جملة المعادلات السابقة فتناظر الجملة حول محور أفقي مار بالقوة الخارجية يقتضي بأن يكون :

$$u_{x^2(1)} = u_{x^2(2)} = 0$$

وبحذف الأسطر والأعمدة الموافقة لتلك الانتقالات من جملة المعادلات الأخيرة نحصل على :

$$192307.7 \times \begin{bmatrix} 7.15 & -4 \\ -4 & 7.15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^1(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \end{bmatrix}$$

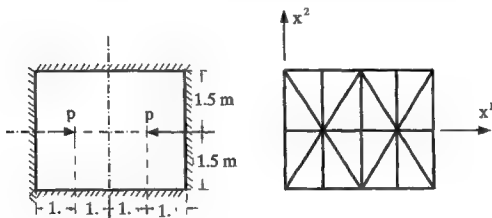
وعليه تكون انتقالات العقدتين (1) , (2) :

$$u_{x^1(1)} = 2.6464516 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$u_{x^1(2)} = 1.480532 \times 10^{-4} \text{ m}$$

مثال 5-7:

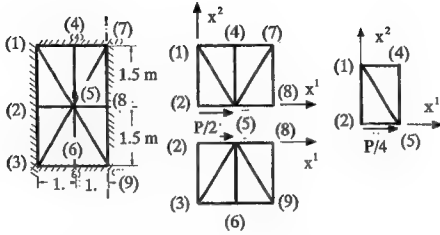
لدينا شريحة مستطيلة موثوقة من جميع أطرافها ومعرضة في مستوييها لقوتين مركبتين مبيتين إلى جانب الخصائص الهندسية لها في الشكل م 5-7. قسمت الشريحة إلى عناصر منتهية كما يبين الشكل م 5-7. والمطلوب: إيجاد قوى المقطع في العنصرين (1),(2) من الشريحة.



$$P = 50 \text{ kN} ; E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 ; \nu = 0.3 ; t = 1 \text{ cm}$$

شكل م 5-7: التقسيم إلى عناصر منتهية. شكل م 5-7: المنشأ والخصائص الهندسية.





شكل م 4-5-7 دراسة ربع الشريحة. شكل م 3-5-7 تقسيم نصف الشريحة إلى جزأين.

الحل:

باعتبار أن الشريحة معرضة لقوى أفقية فقط وبتناظر مزدوج حول المحورين  $x^1$  و  $x^2$  الموازي لـ  $x^2$  لشكل الشريحة وحالة التحميل وعليه تكون الانتقالات الشاقولية لكل العقد صفرية.

بالإضافة إلى ذلك وباعتبار العقدة 8 هي مركز التناظر المزدوج يكون الانتقال الأفقي للعقدة 8 معلوما. وبالتالي يمكن الاكتفاء بدراسة نصف الشريحة المبين في الشكل م 3-5-7 تحت تأثير القوة  $p$  . ونصف الشريحة هذا يمكن تقسيمه إلى جزأين تحت تأثير قوة مقدارها  $P/2$  لتناظره حول المحور  $x^1$  شكل م 3-5-7. ونصف نصف الشريحة متناظر هندسيا حول محور مار في العقدتين (7) و (8). ولذلك يكفي بدراسة نصفه أيضا تحت تأثير قوة مقدارها  $P/4$  كما يبين الشكل م 4-5-7.

يمكن الآن البدء بحساب مصفوفة القساوة للعناصر وتشكيل جملة المعادلات الخطية الجبرية لانتقالات العقد.

فالعنصر  $e_1$  وباعتبار  $(i)=(1), (j)=(2), (k)=(5)$  تكون مصفوفة التساوة كالتالي:

$$k_{(e_1)}^{i(p)k(q)} = 769230.7 \times \begin{bmatrix} 0.35 & 0 & -0.35 & -0.525 & 0 & 0.525 \\ 0 & 1 & -0.45 & -1 & 0.45 & 0 \\ -0.35 & -0.45 & 2.6 & 0.975 & -2.25 & -0.525 \\ -0.525 & -1 & 0.975 & 1.7875 & -0.45 & -0.7875 \\ 0 & 0.45 & -2.25 & -0.45 & 2.25 & 0 \\ 0.525 & 0 & -0.525 & -0.7875 & 0 & 0.7875 \end{bmatrix}$$

وللعنصر  $e_2$  باعتبار  $(i)=(4), (j)=(1), (k)=(5)$  تكون مصفوفة التساوة كالتالي:

$$k_{(e_2)}^{i(p)k(q)} = 769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.6 & 0.975 & -2.25 & -0.525 & -0.35 & -0.45 \\ 0.975 & 1.7875 & -0.45 & -0.7875 & -0.525 & -1 \\ -2.25 & -0.45 & 2.25 & 0 & 0 & 0.45 \\ -0.525 & -0.7875 & 0 & 0.7875 & 0.525 & 0 \\ -0.35 & -0.525 & 0 & 0.525 & 0.35 & 0 \\ -0.45 & -1 & 0.45 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبعد حذف المساند وإيدائها بقوى ردود الأفعال وهي في هذه الحالة قوتين في العقد المرتبطة

(1),(2),(4) قوة في اتجاه  $x^1$  هي  $\bar{F}^{x^1}$  وقوة في اتجاه  $x^2$  وهي  $\bar{F}^{x^2}$  نحصل على جملة

المعادلات الخطية التالية :

\* \* \* \* \*

$$769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.6 & 0 & -0.35 & -0.525 & -2.25 & -0.45 & 0 & 0.975 \\ 0 & 1.7875 & -0.45 & -1 & -0.525 & -0.7875 & 0.975 & 0 \\ -0.35 & -0.45 & 2.6 & 0.975 & 0 & 0 & -2.25 & -0.525 \\ -0.525 & -1 & 0.975 & 1.7875 & 0 & 0 & -0.45 & -0.7875 \\ -2.25 & -0.525 & 0 & 0 & 2.6 & 0.975 & -0.35 & -0.45 \\ -0.45 & -0.7875 & 0 & 0 & 0.975 & 1.7875 & -0.525 & -1 \\ 0 & 0.975 & -2.25 & -0.45 & -0.35 & -0.525 & 2.6 & 0 \\ 0.975 & 0 & -0.525 & -0.7875 & -0.45 & -1 & 0 & 1.7875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} \\ u_{x^1(2)} \\ u_{x^1(3)} \\ u_{x^1(4)} \\ u_{x^1(5)} \\ u_{x^2(1)} \\ u_{x^2(2)} \\ u_{x^2(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}^{x^1(1)} \\ \bar{F}^{x^1(2)} \\ \bar{F}^{x^1(3)} \\ \bar{F}^{x^1(4)} \\ \bar{F}^{x^1(5)} \\ \bar{F}^{x^2(1)} \\ \bar{F}^{x^2(2)} \\ 12.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباعتبار أن  $u_{x^1(1)} = u_{x^2(1)} = u_{x^1(2)} = u_{x^2(2)} = u_{x^1(4)} = u_{x^2(4)} = 0$  فيمكن حذف

الأسطر والأعمدة الموافقة لهذه الانتقالات من الجملة وقد أشر لها بنجمة ويتبقى لدينا المعادلتين

التاليتين:

$$769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.6 & 0 \\ 0 & 1.7875 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(3)} \\ u_{x^2(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه ينتج أن الانتقاليين المجهولين للعقدة (5) هما:

$$u_{x^1(5)} = 6.25 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad u_{x^1(5)} = 0$$

تستخدم الأسطر المخنوفة لحساب قيم ردود الأفعال فبتمويض شعاع الانتقالات الكلي الوارد في جملة المعادلات الخطية بقيمه التي أصبحت كلها معلومة نحصل على الترتيب على ردود الأفعال التالية:

$$\bar{F}_{x^1(1)} = 0$$

$$\bar{F}_{x^2(1)} = 4.6875$$

$$\bar{F}_{x^1(2)} = -10.8173077$$

$$\bar{F}_{x^2(2)} = -2.163461541$$

$$\bar{F}_{x^1(4)} = -1.682692309$$

$$\bar{F}_{x^2(4)} = -2.524038464$$

وهذه ناتجة من ضرب العمود الخامس لجملة المعادلات النهائية السابقة بقيمة الانتقال  $u_{x^1(5)}$  وذلك لأن بقية الانتقالات الأخرى كلها صفرية. ويلاحظ أن جملة القوى المحسوبة هذه متوازنة، فمجموع قوى ردود الأفعال الشاقولية يساوي الصفر، ومجموع قوى ردود الأفعال الأفقية والقوة الخارجة  $P/4$  مساو للصفر أيضاً.

لحساب قوى المقطع نبدأ بحساب التشوهات على مستوى العنصر ونستخدم لذلك العلاقة:

$$u_{i,j} = N^{(p)}_{i,j} u_{l(p)}$$

للعنصر الأول حيث أخذ ترتيب العقد بالشكل (i)=(1), (j)=(2), (k)=(5) يكون:

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} u_{x^1(1)} & u_{x^1(2)} & u_{x^1(5)} \\ u_{x^2(1)} & u_{x^2(2)} & u_{x^2(5)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} x^2_{(j)(k)} & x^1_{(k)(l)} \\ x^2_{(k)(l)} & x^1_{(j)(k)} \\ x^2_{(l)(l)} & x^1_{(j)(k)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6.25 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1.5} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5 & -1 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.25 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 6.25 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبعدها يمكن حساب الإجهادات بالعلاقة :

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{x^1x^1} \\ \sigma^{x^2x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^2} \end{bmatrix} = 230769230.8 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6.25 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1442.31 \\ 0 \\ 0 \\ 432.7 \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون قوى المقطع على الشكل:

$$n^i = t \cdot \sigma^{ij} = \begin{bmatrix} n^{x^1x^1} \\ n^{x^2x^1} \\ n^{x^1x^2} \\ n^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.42 \\ 0 \\ 0 \\ 4.33 \end{bmatrix} \text{ kn/m}$$

أما في العنصر الثاني حيث (i)=(4), (j)=(1), (k)=(5) فتكون موترة التشوهات كالتالي:

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6.25 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1.5} \cdot \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.167 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 2.083 \times 10^{-6} \\ 2.083 \times 10^{-6} & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه تكون الإجهادات في العنصر الثاني على الشكل:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{x^1x^1} \\ \sigma^{x^2x^1} \\ \sigma^{x^1x^2} \\ \sigma^{x^2x^2} \end{bmatrix} = 23076230.8 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2.083 \times 10^{-6} \\ 2.083 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 336.54 \\ 336.54 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وقوى المقطع كالتالي:

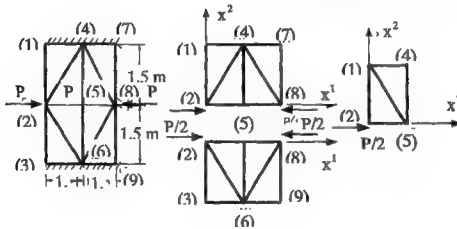
$$\begin{bmatrix} n^{x^1x^1} \\ n^{x^2x^1} \\ n^{x^1x^2} \\ n^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.3654 \\ 3.3654 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال 6-7:

لدينا الشريحة ذات الخواص الهندسية المبينة على

الشكل م-6-7، تتعرض لحمولة مقلوها  $p$

في كل من عقدتيها (2)، (8) والمطلوب:



$$E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2; \nu = 0.3; t = 0.10 \text{ m} \quad p = 50 \text{ kN}$$

شكل م-6-7: استخدام التناظر  
شكل م-6-1: للنشأ، والخواص الهندسية

1- حساب الانتقالات في العقدتين (2)، (5) من الشريحة.

2- حساب ردود الأفعال في العقدتين (1)، (4).

3- حساب التشوهات وقوى للمقطع في العنصر  $e_1$ .

الحل:

كالمادة نبدأ بحساب مصفوفات القساوة للعناصر.

مصفوفة القساوة للعنصر  $e_1$ :

$$c = \frac{E.t}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{4A} = \frac{2.1 \times 10^7 \times 0.1}{1-0.09} \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{1.5 \times 1}{2}} = 769230.77$$

$$k_{e_1}^{i(p)k(q)} = 769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.6 & -0.975 & -0.35 & 0.45 & -2.25 & 0.525 \\ -0.975 & 1.7875 & 0.525 & -1 & 0.45 & -0.7875 \\ -0.35 & 0.525 & 0.35 & 0 & 0 & -0.525 \\ 0.45 & -1 & 0 & 1 & -0.45 & 0 \\ -2.25 & 0.45 & 0 & -0.45 & 2.25 & 0 \\ 0.525 & -0.7875 & -0.525 & 0 & 0 & 0.7875 \end{bmatrix}$$

مصفوفة القساوة للعنصر  $e_2$ :

$$k_{e_2}^{i(p)k(q)} = 769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.25 & 0 & -2.25 & 0.45 & 0 & -0.45 \\ 0 & 0.7875 & 0.525 & -0.7875 & -0.525 & 0 \\ -2.25 & 0.525 & 2.6 & -0.975 & -0.35 & 0.45 \\ 0.45 & -0.7875 & -0.975 & 1.7875 & 0.525 & -1 \\ 0 & -0.525 & -0.35 & 0.525 & 0.35 & 0 \\ -0.45 & 0 & 0.45 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جملة المعادلات الخطية الكلية لانتقالات العقد:

$$769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.6 & -0.975 & -0.35 & 0.45 & -2.25 & 0.52 & 0 & 0 \\ -0.975 & 1.7875 & 0.525 & -1 & 0.45 & -0.7875 & 0 & 0 \\ -0.35 & 0.525 & 2.6 & 0 & 0 & -0.975 & -2.25 & 0.45 \\ 0.45 & -1 & 0 & 1.7875 & -0.975 & 0 & 0.525 & -0.7875 \\ -2.25 & 0.45 & 0 & -0.975 & 2.6 & 0 & -0.35 & 0.525 \\ 0.525 & -0.7875 & -0.975 & 0 & 0 & 1.7875 & 0.45 & -1 \\ 0 & 0 & -2.25 & 0.525 & -0.35 & 0.45 & 2.6 & -0.975 \\ 0 & 0 & 0.45 & -0.7875 & 0.525 & -1 & -0.975 & 1.7875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x(0)}^t \\ u_{x(0)}^t \\ u_{x(0)}^t \\ u_{x(0)}^t \\ u_{x(0)}^t \\ u_{x(0)}^t \\ u_{x(0)}^t \\ u_{x(0)}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_0^t \\ \bar{R}_0^t \\ \bar{R}_0^t \\ \bar{R}_0^t \\ \bar{R}_0^t \\ \bar{R}_0^t \\ \bar{R}_0^t \\ \bar{R}_0^t \end{bmatrix}$$

جمله للمعادلات الخطية لانتقالات العقد بعد تعريض الشروط الطرفية:

$$769230.77 \times \begin{bmatrix} 2.6 & 0 \\ 0 & 1.7875 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^1(2)} \\ u_{x^2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتكون الانتقالات المجهولة للعقد:

$$u_{x^1(2)} = 1.25 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$u_{x^2(2)} = 0$$

اما ردود الأفعال فتحسب بالشكل:

$$769230.77 \times \begin{bmatrix} -0.35 \\ 0.525 \\ 0 \\ -0.975 \\ -2.25 \\ 0.45 \end{bmatrix} \times 1.25 \times 10^{-5} = \begin{bmatrix} -3.365 \\ 5.048 \\ 0 \\ -9.375 \\ -21.635 \\ 4.327 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{(1)}^{x^1} \\ \bar{F}_{(1)}^{x^2} \\ \bar{F}_{(4)}^{x^1} \\ \bar{F}_{(4)}^{x^2} \\ \bar{F}_{(3)}^{x^1} \\ \bar{F}_{(3)}^{x^2} \end{bmatrix}$$

حساب قوى المقطع:

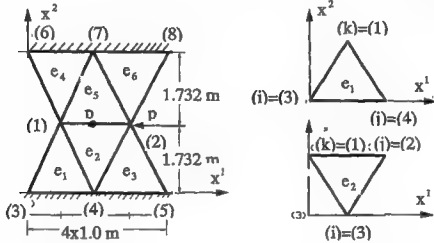
$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 1.25 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1.5 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & -8.33 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{x^1 x^1} \\ \sigma^{x^2 x^1} \\ \sigma^{x^1 x^2} \\ \sigma^{x^2 x^2} \end{bmatrix} = 230769230.8 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.35 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4166 \times 10^{-6} \\ -0.4166 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -67.31 \\ -67.31 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n^b = t \cdot \sigma^b = \begin{bmatrix} n^{x^1 x^1} \\ n^{x^2 x^1} \\ n^{x^1 x^2} \\ n^{x^2 x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.731 \\ -6.731 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN/m}$$

### مثال 7-7:

شريحة مستوية أبعادها وخواصها الهندسية وتقسيمها إلى عناصر منتهية مبنية على الشكل م7-7. تخضع الشريحة لقوة مركزة  $F$  مقدارها  $100 \text{ kN}$ . فإذا نسبت الشريحة إلى جملة محاور إحداثية المطلوب:



$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kN/m}^2; \nu = 0.3333; t = 0.010 \text{ m} \quad p = 100 \text{ kN}$$

شكل م7-7: المنشأ، والخواص الهندسية

1- حساب انتقالات العقدتين (1), (2).

2- حساب الانتقال في النقطة  $p(2, \sqrt{3})$

المبنية على الشكل.

3- تحديد حالة التشوهات والحالة الإجهادية

في العنصر  $e_2$ .



الحل:

- حساب مصفوفات القساوة :

العنصر  $e_1$ :

$$c = \frac{2.0 \times 10^5 \times 0.01}{1 - 0.1111} \cdot \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3}} = 3247.6$$

$$x^1_{(i)(j)} = -2$$

$$x^2_{(i)(j)} = 0$$

$$x^1_{(j)(k)} = +1$$

$$x^2_{(j)(k)} = -\sqrt{3}$$

$$x^1_{(k)(i)} = +1$$

$$x^2_{(k)(i)} = \sqrt{3}$$

$$k_{e_1} = 3247.6 \times \begin{bmatrix} 3.333 & 1.1547 & -2.666 & 0 & -0.66 & -1.1547 \\ 1.1547 & 2 & 0 & 0 & -1.1547 & -2 \\ -2.666 & 0 & 3.333 & -1.1547 & -0.666 & 0.666 \\ 0 & 0 & -1.1547 & 2 & 1.1547 & -2 \\ -0.666 & -1.1547 & -0.666 & 1.1547 & 1.333 & 0 \\ -1.1547 & -2 & 0.666 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

العنصر  $e_2$ :

$$(i)=(4)$$

$$(j)=(2)$$

$$(k)=(1)$$

$$x^1_{(i)(j)} = -1$$

$$x^2_{(i)(j)} = -\sqrt{3}$$

$$x^1_{(j)(k)} = 2$$

$$x^2_{(j)(k)} = 0$$

$$x^1_{(k)(i)} = -1$$

$$x^2_{(k)(i)} = \sqrt{3}$$

$$k_{e_2} = 3247.6 \times \begin{bmatrix} 1.3333 & 0 & -0.6666 & -1.1547 & -0.666 & 1.1547 \\ 0 & 4 & -1.1547 & -2 & 1.1547 & -2 \\ -0.666 & -1.1547 & 3.333 & 1.1547 & -2.66 & 0 \\ -1.1547 & -2 & 1.1547 & 2 & 0 & 0 \\ -0.666 & 1.1547 & -2.666 & 0 & 3.333 & -1.1547 \\ 1.1547 & -2 & 0 & 0 & -1.1547 & 2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة القساوة للعنصرين  $e_3$  و  $e_5$  كتلك التي للعنصر  $e_1$  . ومصفوفة القساوة للعنصرين  $e_4$  و  $e_6$  كتلك التي للعنصر  $e_2$  :

$$\begin{aligned} k^{11}_{e_3} &= k^{33}_{e_1} & k^{22}_{e_3} &= k^{11}_{e_1} \\ k^{11}_{e_4} &= k^{44}_{e_2} & k^{22}_{e_4} &= k^{44}_{e_2} \\ k^{12}_{e_5} &= k^{34}_{e_1} & k^{22}_{e_5} &= k^{44}_{e_1} \end{aligned}$$

وتكون جملة المعادلات بعد تعويض الشروط الطرفية :

$$C \cdot \begin{bmatrix} k^{11}_{e_1} + k^{11}_{e_2} + k^{11}_{e_3} + k^{11}_{e_4} & k^{12}_{e_2} + k^{12}_{e_5} \\ k^{21}_{e_2} + k^{21}_{e_5} & k^{22}_{e_2} + k^{22}_{e_3} + k^{22}_{e_4} + k^{22}_{e_5} \end{bmatrix} =$$

$$C \cdot \begin{bmatrix} 9.333 & 0 & -5.333 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ -5.333 & 0 & 9.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x^{(1)}} \\ u_{x^{(2)}} \\ u_{x^{(1)}} \\ u_{x^{(2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{x^{(1)}} = 0$$

$$u_{x^{(2)}} = 0$$

$$u_{x^{(1)}} = -\frac{100}{11 \cdot c} = -\frac{100}{11 \times 3247.6} = -2.79927 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_{x^{(2)}} = -\frac{175}{11 \cdot c} = -\frac{175}{11 \times 3247.6} = -4.89872 \times 10^{-3} \text{ m}$$

حساب انتقالات النقطة  $p$  :  $(i)=(4)$  ,  $(j)=(2)$  ,  $(k)=(1)$

نحسب انتقالات النقطة  $p$  من علاقة الانتقالات ضمن العنصر المنتهي بتعويض إحداثيات النقطة  $p$  في العلاقة المذكورة.

$$2A_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & 3 & \sqrt{3} \\ 1 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = 0$$

$$2A_{(i)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{3}$$

$$2A_{(k)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \quad ; \quad 2A = 2\sqrt{3}$$

$$u_i = N^{(p)} \cdot u_{i(p)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2.79927 \times 10^{-3} \\ -4.89872 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = -3.849 \times 10^{-3}$$

(i)=(4), (j)=(2), (k)=(1) : حساب التشوهات والإجهادات في العنصر  $e_2$

$$u_{i,j} = u_{i(p)} \cdot N^{(p)}_{,j}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{x^1(i)} & u_{x^1(j)} & u_{x^1(k)} \\ u_{x^2(i)} & u_{x^2(j)} & u_{x^2(k)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} x^2_{(j)(k)} & x^1_{(k)(j)} \\ x^2_{(k)(i)} & x^1_{(i)(k)} \\ x^2_{(i)(j)} & x^1_{(j)(i)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4.89872 \times 10^{-3} & -2.79927 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

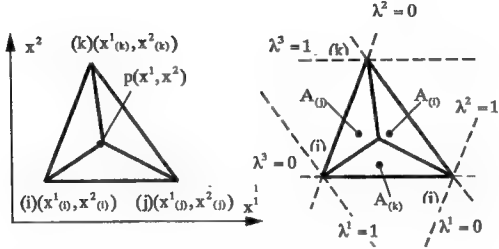
$$\begin{bmatrix} -1.049725 \times 10^{-3} & -2.22222 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{x^1 x^1} & \epsilon_{x^1 x^2} \\ \epsilon_{x^2 x^1} & \epsilon_{x^2 x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.049725 \times 10^{-3} & -1.11111 \times 10^{-3} \\ -1.11111 \times 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{x^1 x^1} \\ \sigma^{x^1 x^2} \\ \sigma^{x^2 x^1} \\ \sigma^{x^2 x^2} \end{bmatrix} = \frac{2 \times 10^4}{1 - 0.11111} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.333 \\ 0 & 0.333 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0.333 & 0 \\ 0.333 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1.049725 \times 10^{-3} \\ -1.11111 \times 10^{-3} \\ -1.11111 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23.6188 \\ -16.6666 \\ -16.6666 \\ -7.87294 \end{bmatrix}$$

حيث:  $A = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  مساحة العنصر المنتهي .

### 7-3- عنصر شريحة مغلفي في الإحداثيات الطبيعية:



شكل (11-7): الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الطبيعية.

عند استنتاج تواضع الشكل في الإحداثيات الديكارتية وجدنا أن نقطة ما  $p(x^1, x^2)$  من المثلث تحدد ثلاث مساحات أهميها  $A_{(k)}, A_{(j)}, A_{(i)}$  على التوالي ويمكن تعيين قيمها وفق العلاقة (7-54) بعد معرفة إحداثيات رؤوس المثلث وقيم إحداثيات النقطة  $p$ . والمساحة  $A_{(i)}$  هي مساحة للمثلث الذي تشكله النقطة  $p$  مع العقدتين  $(j), (k)$  وهكذا ..

وبالتالي يمكن توقيع أي نقطة من المثلث بمعرفة هذه المساحات. فلو عرفنا الإحداثيات الطبيعية المثلثية كنسب هذه المساحات إلى المساحة الأصلية كما هو وارد في العلاقة (7-55) لوجدنا أن الثلاثية  $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$  تحدد النقطة  $p$  تحديدا تاما. لنحدد الآن تحول الخط الإحداثي  $\lambda^1$ .  $\lambda^1$  هو نسبة المساحة للمثلثية التي تحدها النقطة  $p$  مع العقدتين  $(j), (k)$ . وبالتالي إذا وقعت النقطة  $p$  على المستقيم الواصل بين  $(j), (k)$  لأخذت  $\lambda^1$  القيمة صفر. وفي حال انطبق  $p$  على  $(i)$  لأخذت القيمة واحد. وهكذا الأمر بالنسبة للإحداثيين الآخرين  $\lambda^2, \lambda^3$ . أي أن قيم الإحداثيات الطبيعية المثلثية تتحول بين الصفر والواحد. وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$0 \leq \lambda^a \leq 1$$

(7-104)

والشكل (11-7) يبين تحول عطوط الإحداثيات هذه.

وباعتبار أنه في المستوى يكفي خطي إحداثيات لتحديد نقطة ما تعيينا تاما فإن اثنتين من الإحداثيات السابقة مستقلة خطيا والثالث متعلق بهما. وهذا واضح فالإحداثيات الثلاثة تحقق العلاقة التالية:

$$\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 1 \quad (7-105)$$

وذلك لأن:

$$A_{(i)} + A_{(j)} + A_{(k)} = A \quad (7-106)$$

وفي استخدام الإحداثيات الثلاثية ليس هناك من أفضلية في استخدام أي من الإحداثيات على الآخر. وإنما يتم اختيار الإحداثيين المستقلين وفقا لموضوع العناصر الهندسية التفاضلية. ولتعيين الخواص الهندسية التفاضلية للعنصر، لابد في البدء من تحديد العلاقة التي تربط بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الطبيعية. تستخدم صيغة التوابع التقريبية لتحديد هذه العلاقة. بافتراض أن النقطة  $p(x^1, x^2)$  تملك أيضا الإحداثيات الطبيعية  $p(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$  فيمقدورنا تقريب الإحداثيات الديكارتية بالصيغتين التاليتين:

$$x^1 = \begin{bmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix} \quad ; \quad x^i = \lambda^q \cdot \alpha^i_q \quad (7-107)$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix}$$

حيث  $\alpha^i_q$  ثوابت اختيارية يجب تعيينها. هاتين العلاقتين يجب أن تعطيا إحداثيات العقد الديكارتية عند تعويض الأخيرة فيهما وذلك لأنهما تصفان الإحداثيات الديكارتية لأي نقطة من المثلث . بإجراء التعويض نحصل على:

$$\begin{bmatrix} x^1_{(i)} \\ x^1_{(j)} \\ x^1_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2_{(i)} \\ x^2_{(j)} \\ x^2_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} \quad x^i_{(p)} = \delta^{(p)}_{(p)} \cdot \alpha^i_{(p)} \quad (7-108)$$

بعكس العلاقتين السابقتين نحصل على الثوابت الاختيارية بدلالة إحداثيات رؤوس المثلث:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1_{(i)} \\ x^1_{(j)} \\ x^1_{(k)} \end{bmatrix} \quad \alpha^i_{(p)} = \delta^{(p)}_{(p)} \cdot x^i_{(p)} \quad (7-109)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2_{(i)} \\ x^2_{(j)} \\ x^2_{(k)} \end{bmatrix}$$

وبالعودة إلى العلاقة (7-107) نحصل على علاقة تربط بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الطبيعية مقترنة بالإحداثيات الديكارتية لرؤوس المثلث:

$$x^1 = [\lambda^1 \quad \lambda^2 \quad \lambda^3] \cdot \begin{bmatrix} x^1_{(i)} \\ x^1_{(j)} \\ x^1_{(k)} \end{bmatrix} \quad x^i = \lambda^\eta \cdot \delta^{(p)}_{(p)} \cdot x^i_{(p)} \quad (7-110)$$

$$x^2 = [\lambda^1 \quad \lambda^2 \quad \lambda^3] \cdot \begin{bmatrix} x^2_{(i)} \\ x^2_{(j)} \\ x^2_{(k)} \end{bmatrix}$$

وباستخدام صيغة توابع الشكل نحصل على:

$$x^i = N^{(p)} \cdot x^i_{(p)} \quad ; \quad N^{(p)} = \lambda^\eta \cdot \delta^{(p)}_{(p)} \quad (7-111)$$

$$N^{(i)} = \lambda^1, N^{(j)} = \lambda^2, N^{(k)} = \lambda^3$$

يعبر عن شعاع المكان لنقطة ما من المثلث  $p(x^1, x^2)$  في الإحداثيات الديكارتية بالشكل:

$$r = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = x^i e_i \quad (7-112)$$

ولربط هذه العلاقة بالإحداثيات الطبيعية نعوض العلاقة (7-80) فيها:

$$r = N^{(p)} \cdot x^i_{(p)} e_i = N^{(p)} r_{(p)} \quad (7-113)$$

هي أشعة المكان لرؤوس المثلث والمعينة تماماً بإحداثياتها الديكارتية.

تعين أشعة القاعدة الأساسية بمشتقات شعاع المكان وتختلف أشعة القاعدة في شدتها واتجاهها من نقطة إلى أخرى في المثلث. لنحسب الآن أشعة القاعدة الأساسية في رؤوس المثلث. في العقدة (i) لنعتبر أن الإحداثيين المستقلين هما  $\lambda^2, \lambda^3$ . فيكون شعاع القاعدة الأساسي الأول:

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{r}_{,2} = N^{(p)}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{(p)} = N^{(l)}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{(l)} + N^{(j)}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{(j)} + N^{(k)}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{(k)} = -\mathbf{r}_{(l)} + \mathbf{r}_{(j)} \quad (7.114)$$

وذلك لأن :

$$N^{(l)} = \lambda^1 = 1 - (\lambda^2 + \lambda^3), N^{(j)} = \lambda^2, N^{(k)} = \lambda^3$$

$$\frac{\partial N^{(l)}}{\partial \lambda^2} = -1, \frac{\partial N^{(j)}}{\partial \lambda^2} = 1, \frac{\partial N^{(k)}}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (7.115)$$

وشعاع القاعدة الثاني:

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{r}_{,3} = N^{(p)}_{,3} \cdot \mathbf{r}_{(p)} = N^{(l)}_{,3} \cdot \mathbf{r}_{(l)} + N^{(j)}_{,3} \cdot \mathbf{r}_{(j)} + N^{(k)}_{,3} \cdot \mathbf{r}_{(k)} = -\mathbf{r}_{(l)} + \mathbf{r}_{(k)} \quad (7.116)$$

وبالتالي فمركبات أشعة القاعدة الأساسية السابقة والواردة في العلاقة التالية:

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{g}'_\alpha \cdot \mathbf{e}_i \quad (7.117)$$

هي:

$$\mathbf{g}'_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1_{(j)} - \mathbf{x}^1_{(l)} & \mathbf{x}^1_{(k)} - \mathbf{x}^1_{(l)} \\ \mathbf{x}^2_{(j)} - \mathbf{x}^2_{(l)} & \mathbf{x}^2_{(k)} - \mathbf{x}^2_{(l)} \end{bmatrix} \quad (7.118)$$

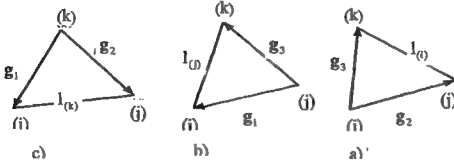
وفي العقدة (j) نعتبر أن الإحداثيات المستقلة هي  $\lambda^1, \lambda^3$ . ونحصل على أشعة القاعدة الأساسية فيها  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3$  بتبديل القرينة (i) بالقرينة (j)، والقرينة (j) بالقرينة (k)، والقرينة (k) بالقرينة (i) في العلاقة (7-118) :

$$\mathbf{g}'_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1_{(k)} - \mathbf{x}^1_{(l)} & \mathbf{x}^1_{(i)} - \mathbf{x}^1_{(l)} \\ \mathbf{x}^2_{(k)} - \mathbf{x}^2_{(l)} & \mathbf{x}^2_{(i)} - \mathbf{x}^2_{(l)} \end{bmatrix} \quad (7.119)$$

وفي العقدة (k) نعتبر أن الإحداثيات المستقلة هي  $\lambda^2, \lambda^1$  ونحصل على أشعة القاعدة الأساسية فيها  $\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1$  بتبديل القرينة (i) بالقرينة (k)، والقرينة (j) بالقرينة (i)، والقرينة (k) بالقرينة (j) في العلاقة (7-118) :

$$\mathbf{g}'_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1_{(i)} - \mathbf{x}^1_{(k)} & \mathbf{x}^1_{(j)} - \mathbf{x}^1_{(k)} \\ \mathbf{x}^2_{(i)} - \mathbf{x}^2_{(k)} & \mathbf{x}^2_{(j)} - \mathbf{x}^2_{(k)} \end{bmatrix} \quad (7.120)$$

وفي الشكل (7-12) c), b), a) مثلت الأشعة السابقة من أجل الإيضاح.



شكل (7-12) : أشعة القاعدة الأساسية

(a) في العقدة (i) , (b) في العقدة (j) , (c) في العقدة (k) .

نحسب المعاملات المترية الأساسية في نقطة ما من المثلث كجداول سلمية لأشعة القاعدة الأساسية بعضها البعض وهي في العقدة (i) مثلاً:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(l_{(k)})^2 & (l_{(j)})^2 + (l_{(k)})^2 - (l_{(i)})^2 \\ (l_{(j)})^2 + (l_{(k)})^2 - (l_{(i)})^2 & 2(l_{(j)})^2 \end{pmatrix} \quad (7-121)$$

حيث كتب الجداء  $g_2 \cdot g_3$  بالشكل:

$$\begin{aligned} g_{23} &= g_{32} = (r_{(k)} - r_{(i)})(r_{(j)} - r_{(i)}) \\ &= \frac{1}{2}(r_{(j)} - r_{(i)})(r_{(j)} - r_{(i)}) + \frac{1}{2}(r_{(k)} - r_{(i)})(r_{(k)} - r_{(i)}) - \frac{1}{2}(r_{(k)} - r_{(j)})(r_{(k)} - r_{(j)}) \\ &= \frac{1}{2}[(l_{(j)})^2 + (l_{(k)})^2 - (l_{(i)})^2] \end{aligned} \quad (7-122)$$

$g$  هو مفكوك معين مصفوفة المعاملات المترية (7-121).

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4}[-(l_{(i)})^4 - (l_{(j)})^4 - (l_{(k)})^4 + 2(l_{(j)})^2(l_{(j)})^2 \\ &\quad + 2(l_{(j)})^2(l_{(k)})^2 + 2(l_{(j)})^2(l_{(k)})^2] = 4A^2 \end{aligned} \quad (7-123)$$



والعنصر السطحي إذا:

$$\sqrt{g} = 2A \quad (7-124)$$

يلاحظ أن العنصر السطحي هو مساحة متوازي الأضلاع المرسوم على شعاعي القاعدة وله القيمة نفسها في كل عقد المثلث وهي ضعف مساحة المثلث.

نحصل على المعاملات المترية الضدية بعكس مصفوفة المعاملات المترية الأساسية فالعلاقة بينهما ممثلة بالمعادلة التالية:

$$g_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha \quad (7-125)$$

وبالعودة إلى العلاقة (7-121) نجد:

$$g^{\beta\gamma} = \frac{1}{8A^2} \begin{pmatrix} 2(l_{(j)})^2 & (l_{(j)})^2 - (l_{(j)})^2 - (l_{(k)})^2 \\ (l_{(j)})^2 - (l_{(j)})^2 - (l_{(k)})^2 & 2(l_{(k)})^2 \end{pmatrix} \quad (7-126)$$

يمكن حساب أشعة القاعدة الضدية من المعاملات المترية الضدية وأشعة القاعدة الأساسية وفق العلاقة:

$$g^\alpha = g^{\alpha\beta} \cdot g_\beta \quad (7-127)$$

ويمكن أيضا إجراء هذا الحساب من التعريف مباشرة:

$$g^\alpha \cdot g_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad ; \quad g_i^\alpha \cdot g_j^\beta \cdot e^i \cdot e_j = g_i^\alpha \cdot g_j^\beta \cdot \delta_j^i = g_i^\alpha g_\beta^i = \delta^\alpha_\beta \quad (7-128)$$

أي بأخذ المعكوس المباشر لمصفوفة مركبات أشعة القاعدة الأساسية وذلك عندما تكون الأخيرة مربعة. فمثلا في العقدة (i) يمكن كتابة العلاقة (7-128) بالشكل التفصيلي:

$$\begin{bmatrix} x^1_{(j)} - x^1_{(i)} & x^2_{(j)} - x^2_{(i)} \\ x^1_{(k)} - x^1_{(i)} & x^2_{(k)} - x^2_{(i)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{x^1}^2 & g_{x^1}^3 \\ g_{x^2}^2 & g_{x^2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-129)$$

في هذه العلاقة أخذ مبادل المصفوفة (7-118) وذلك باعتبار أن الجداء المصفوفي غير تبديلي وأن الجداء للمعرف في العلاقة (7-129) تبديلي. من العلاقة (7-128) نتج مركبات أشعة القاعدة الضدية التالية:

$$g_i^\alpha = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x^2_{(k)} - x^2_{(i)} & x^2_{(j)} - x^2_{(i)} \\ x^1_{(j)} - x^1_{(k)} & x^1_{(j)} - x^1_{(i)} \end{bmatrix}, \alpha = 2,3 \quad (7-130)$$

ونحصل على مركبات أشعة القاعدة الضدية في العقدتين الآخرين (j),(k) بـالتبديل الدوري للقرائن ، ففي العقدة (j) نحصل على :

$$g_i^{\alpha} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x^2(j) - x^2(j) & x^2(j) - x^2(k) \\ x^1(j) - x^1(j) & x^1(k) - x^1(j) \end{bmatrix}, \alpha = 3,1 \quad (7-131)$$

وفي العقدة (k) على:

$$g_i^{\alpha} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x^2(j) - x^2(k) & x^2(k) - x^2(j) \\ x^1(k) - x^1(j) & x^1(j) - x^1(k) \end{bmatrix}, \alpha = 1,2 \quad (7-132)$$

يلاحظ أن عناصر مصفوفات العلاقات (7-130),(7-131),(7-132) مكررة.

وبالتالي يمكن تجميع هذه المصفوفات في مصفوفة واحدة مع اعتبار أن  $\alpha$  تأخذ القيم 1,2,3.

$$g_i^{\alpha} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x^2(j) - x^2(k) & x^2(k) - x^2(j) & x^2(j) - x^2(j) \\ x^1(k) - x^1(j) & x^1(j) - x^1(k) & x^1(j) - x^1(j) \end{bmatrix}, \alpha = 1,2,3 \quad (7-133)$$

بعد حساب الخواص الهندسية التفاضلية للمعصر نتقل الآن إلى تقريب تابع الانتقالات واشتقاق مصفوفة القساوة. يمكن اختيار تابع الانتقالات  $u_i$  في الإحداثيات الديكارتية بنفس الشكل (7-107) الذي استخدم لتقريب الإحداثيات الديكارتية لنقطة من المثلث، وبتحديد الثوابت الاختيارية بإتباع خطوات مشابهة للخطوات من (7-107) إلى (7-111) نحصل على التابع التقريبي:

$$u_i = N^{(p)} u_{i(p)} \quad (7-134)$$

حيث  $u_{i(p)}$  هي انتقالات المعقد وهي بالتفصيل:

$$u_{i(p)} = \begin{bmatrix} u_{x^1(j)} & u_{x^1(j)} & u_{x^1(k)} \\ u_{x^2(j)} & u_{x^2(j)} & u_{x^2(k)} \end{bmatrix} \quad (7-135)$$

و  $N^{(p)}$  توابع الشكل وهي معطاة في العلاقة (7-111).

يحقق تابع الانتقالات هنا شروط التقارب الواجب تحقيقها في طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات، ومنها التوافق أو التطابق بين الانتقالات عند الانتقال من عنصر منتهي إلى عنصر منتهي مجاور. إذ أن تابع الانتقالات على طول ضلع المثلث يتعلق فقط بالإحداثي على هذا الضلع وبانتقال العقدتين الطرفيتين لهذا الضلع.

نحتاج عند اشتقاق موتره التشوهات من الانتقالات الواردة في العلاقة (7-134) والتابعة للإحداثيات الطبيعية إلى إجراء الاشتقاق وفق الإحداثيات الديكارتية، لهذا الغرض نستخدم قاعدة اشتقاق تابع التابع:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial u_i}{\partial \lambda^\alpha} \cdot \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^k} \quad (7-136)$$

$$u_{i,k} = u_{i,\alpha} \cdot \lambda^\alpha_{,k} = u_{i,\alpha} \cdot g_k^\alpha$$

وهذا المشتق يمكن إجرؤه في إحداثيات أي من العقد (i),(j),(k). نمثلا في إحداثيات العقدة (i) حيث التحولات المستقلة المتغيرة  $\lambda^3, \lambda^2$  يساوي هذا المشتق:

$$u_{i,k} = u_{i,2} \cdot g_k^2 + u_{i,3} \cdot g_k^3 \quad (7-137)$$

ويمكن صياغة كل العلاقات منسوبة إلى هذه الإحداثيات. وهناك صياغة أكثر أناقة وهي صياغة العلاقات دون تفضيل إحداثيات أي عقدة على الأخرى. ويتم ذلك بالتظاهر بمعاملة الإحداثيات الطبيعية الثلاثة  $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$  وكأنها مستقلة عن بعضها البعض. فلو اعتبرنا أن هناك ثلاثة إحداثيات طبيعية  $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$  مرتبطة مع الأخيرة بالعلاقات الخطية التالية:

$$\lambda^1 = \lambda^1; \lambda^2 = \lambda^2; \lambda^3 = 1 - \lambda^2 - \lambda^3 \quad (7-138)$$

لكان بإمكاننا أن نشكل مشتق الانتقالات وفق ما يلي:

$$u_{i,\alpha} = u_{i,1} \cdot \lambda^1_{,\alpha} + u_{i,2} \cdot \lambda^2_{,\alpha} + u_{i,3} \cdot \lambda^3_{,\alpha} \quad (7-139)$$

$$u_{i,\alpha} = u_{i,\bar{\rho}} \cdot \lambda^{\bar{\rho}}_{,\alpha}; \bar{\rho} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}; \alpha = 2, 3$$

والمصفوفة  $\lambda^{\bar{\rho}}_{,\alpha}$  تحتوي بالنظر إلى العلاقات (7-138) على العناصر التالية:

$$\lambda^{\bar{\rho}}_{,\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-140)$$

بتعويض المعادلة الثانية من العلاقة (7-139) في المعادلة الثانية من العلاقة (7-136) نحصل على:

$$u_{i,k} = u_{i,\bar{\rho}} \cdot \lambda^{\bar{\rho}}_{,\alpha} \cdot g_k^\alpha \quad (7-141)$$

ومفكوك هذه العلاقة بالنسبة لـ  $\alpha, \bar{\rho}$  هو:

$$u_{i,k} = u_{i,\bar{1}}(-g_k^2 - g_k^3) + u_{i,\bar{2}} \cdot g_k^2 + u_{i,\bar{3}} \cdot g_k^3 \quad (7-142)$$

وبالعودة إلى العلاقات (7-130)، (7-132) نلاحظ أن:

$$g_k^1 = -g_k^2 - g_k^3 \quad (7-143)$$

وبالتالي تصبح العلاقة (7-142) بالشكل:

$$u_{i,k} = u_{i,1} \cdot g_k^1 + u_{i,2} \cdot g_k^2 + u_{i,3} \cdot g_k^3 \quad (7-144)$$

وهي ما يمكن كتابتها بالصيغة الموترية التالية:

$$u_{i,k} = u_{i,\bar{\alpha}} \cdot g_k^{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha} = \alpha = 1, 2, 3 \quad (7-145)$$

والتي تكون فيها القرائن 1, 2, 3 واردة دون تفضيل الواحدة عن الأخرى. وبرغم تمييز القرينة  $\bar{\alpha}$  عن  $\alpha$  بالإشارة - فوقها يفهم ضمنا أن الجمع يتم على هذه القرينة. وإذا أردنا الدقة أكثر في التعبير عن الجداء (7-144) يمكن إدخال موتر كرونيكر  $\delta_{\bar{\alpha}\alpha}$  ضمن الجداء في الطرف الثاني للعلاقة (7-145) ويفهم في ما يلي من علاقات عند ورود  $\bar{\alpha}, \alpha$  إحداهما في الأعلى والأخرى في الأسفل في جداء مضارب أن الجمع يتم على هذه القرينة.

بعد اعتماد الصيغة (7-145) لاشتقاق توابع الانتقالات في الإحداثيات الديكارتيية يمكن البدء أولا بحساب المشتق  $u_{i,\bar{\alpha}}$  للتوابع التقريبية (7-134).

$$u_{i,\bar{\alpha}} = N_{,\bar{\alpha}}^{(p)} \cdot u_{i(p)} \quad (7-146)$$

حيث:

$$N_{,\bar{\alpha}}^{(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{\bar{\alpha}\alpha}^{(p)} \quad (7-147)$$

والواضح من العلاقة السابقة أن تقريب حالة التشوهات على مستوى العنصر يتم بتابع ثابت لا علاقة له بالإحداثيات ضمن العنصر المنتهي وإنما فقط بانتقالات عقد العنصر المنتهي.

يتم الحصول على مصفوفة القساوة بتقييم تعبير طاقة التشوه الداخلي.

$$\pi_i = \frac{1}{2} \int_{\Delta} \varepsilon_{ij} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot dA = \frac{1}{2} \int_{\Delta} u_{i,j} \cdot t \cdot c^{ijkl} \cdot u_{k,l} \cdot dA \quad (7-148)$$

بتعويض العلاقة (7-146) في (7-145) وتعويض الناتج في العلاقة (7-148) نحصل على:

$$\pi_i = \frac{1}{2} u_{i,p} \left( \int_A N^{(p)}_{,\alpha} \cdot g_j^\alpha \cdot t \cdot c^{ijl} \cdot N^{(q)}_{,\beta} \cdot g_l^\beta \cdot dA \right) u_{k(q)} \quad (7-149)$$

$$= \frac{1}{2} u_{i,p} \cdot k^{i(p)k(q)} \cdot u_{k(q)}$$

حيث:

$$k^{i(p)k(q)} = \int_A N^{(p)}_{,\alpha} \cdot g_j^\alpha \cdot t \cdot c^{ijl} \cdot g_l^\beta \cdot N^{(q)}_{,\beta} \cdot dA \quad (7-150)$$

$$= \int_0^{1-\lambda^2} \int_0^{\lambda^2} N^{(p)}_{,\alpha} \cdot t \cdot c^{iok\beta} \cdot N^{(q)}_{,\beta} \cdot \sqrt{g} \cdot d\lambda^3 \cdot d\lambda^2$$

مصفوفة القساوة للعنصر.

تظهر في العلاقة السابقة المعاملات :

$$t \cdot c^{iok\beta} = g_j^\alpha \cdot t \cdot c^{ijl} \cdot g_l^\beta \quad (7-151)$$

وهي تمثل معاملات القساوة المحولة إلى الإحداثيات الطبيعية. وباعتبار هذه المعاملات غير متعلقة بالإحداثيات المستقلة وكذلك المصفوفة  $N^{(p)}_{,\alpha}$ ، فيمكن إخراجها خارج إشارة التكامل ويتم الحصول على مصفوفة القساوة في العلاقة (7-150) بإجراء الجداء المصفوفي:

$$k^{i(p)k(q)} = \delta^{(p)}_{,\alpha} \cdot t \cdot c^{iok\beta} \cdot \delta^{(q)}_{,\beta} \iint_A dA = t \cdot A \cdot c^{i(p)k(q)} \quad (7-152)$$

لحساب القوى المركزة على العقد والمكافئة لحمولة موزعة ضمن العنصر ولها الشدات  $\bar{f}^i_{(k)}, \bar{f}^i_{(j)}, \bar{f}^i_{(i)}$  على العقد (k),(j),(i) على الترتيب، نفترض توزيعاً خطياً لهذه الحمولة ونستخدم نفس تابع الانتقالات (7-111) لاستنباط شدة الحمولة في نقطة ما لأعلى التعمين ضمن العنصر:

$$\bar{f}^i = N^{(q)}_{,\beta} \cdot \bar{f}^i_{(q)} \quad (7-153)$$

ويصبح كمون القوى الخارجية بالشكل:

$$\pi_i = - \int_A \bar{f}^i \cdot u_i \cdot dA = - \bar{f}^i_{(q)} \int_A N^{(q)}_{,\beta} N^{(p)}_{,\alpha} dA \cdot u_{i(p)} \quad (7-154)$$

$$= - \bar{f}^i_{(q)} \cdot c^{(q)k(p)} \cdot u_{i(p)} = - \bar{f}^{i(p)}_{(p)} \cdot u_{i(p)}$$

والقوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة هي:

$$\bar{f}^{(p)} = \bar{f}^{(q)} \cdot c^{(q)(p)} \quad (7-155)$$

ويجرى التكامل لحساب المصفوفة  $c^{(q)(p)}$  في الإحداثيات الطبيعية:

$$c^{(q)(p)} = \int_0^{1-1/2} \int_0^1 N^{(q)} \cdot N^{(p)} \cdot \sqrt{g} \cdot d\lambda^2 \cdot d\lambda^3 \quad (7-156)$$

والجداء  $N^{(q)} \cdot N^{(p)}$  هو بالتفصيل:

$$N^{(q)(p)} = \begin{bmatrix} (\lambda^1)^2 & \lambda^1 \lambda^2 & \lambda^1 \lambda^3 \\ \lambda^2 \lambda^1 & (\lambda^2)^2 & \lambda^2 \lambda^3 \\ \lambda^3 \lambda^1 & \lambda^3 \lambda^2 & (\lambda^3)^2 \end{bmatrix} \quad (7-157)$$

ولإجراء هذه التكاملات هناك صيغة عملية سريعة يكتفى بذكرها دون التعرض لبرهانها وهي:

$$\int_0^{1-1/2} \int_0^1 (\lambda^1)^m (\lambda^2)^n (\lambda^3)^l d\lambda^3 d\lambda^2 = \frac{m!n!l!}{(m+n+l+2)!} \quad (7-158)$$

وكأمثلة على استخدام هذه الصيغة، يعطى للمثالين التاليين:

$$\int_0^{1-1/2} \int_0^1 (\lambda^1)^2 d\lambda^3 d\lambda^2 = \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} = \frac{2}{24} \quad (7-159)$$

$$\int_0^{1-1/2} \int_0^1 \lambda^1 \cdot \lambda^2 \cdot d\lambda^3 d\lambda^2 = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} = \frac{1}{24} \quad (7-160)$$

وعليه تعطى المصفوفة  $c^{(q)(p)}$  بالشكل:

$$c^{(q)(p)} = \frac{2A}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7-161)$$

في حالة وجود حمولة موزعة بانتظام في اتجاه  $i$  شلها على كل عقدة من عقد المثلث متساوية

ومقدارها  $\bar{f}^{(i)}$  تعطى  $\bar{f}^{(q)}$  بالشكل:

$$\bar{f}^{(i)}_{(q)} = [1 \ 1 \ 1] \cdot \bar{f}^{(i)} \quad (7-162)$$

عندها تكون مقادير القوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة كما يلي:

$$\bar{f}^{(p)} = \frac{A}{3} [1 \ 1 \ 1] \cdot \bar{f}^{(i)} \quad (7-163)$$

أي أن القوة للموزعة تتوزع بالتساوي على العقد الثلاث.

بعد تجميع الطاقة الكامنة على كامل للنشأ وتعويض الشروط الطرفية نحصل على جملة المعادلات الخطية النهائية لانتقالات العقد والتي يمكن بحلها حساب الأخيرة كمحايل لمسألتنا هذه. وبعد حساب هذه الأخيرة يبدأ الطريق العكسي لحساب الانتقالات ضمن أي نقطة من أي عنصر منتهي وحساب التشوهات وكذلك الإجهادات وقوى المقطع. فمثلاً في عنصر ما حسبنا انتقالات عقده  $u_{i(p)}$  ، يمكن حساب مشتق الانتقالات (7-145) بمساعدة (7-146) بالشكل:

$$u_{k,l} = N^{(p)}_{,\alpha} \cdot g_l^\alpha \cdot u_{k(p)} \quad (7-164)$$

ومن ثم تعويض الأخيرة في العلاقة التالية:

$$n^{ij} = t \cdot \sigma^{ij} = t \cdot c^{ijkl} \cdot u_{k,l} \quad (7-165)$$

لحساب قوى المقطع، وهي بالنتيجة:

$$n^{ij} = t \cdot N^{(p)}_{,\alpha} \cdot g_l^\alpha \cdot u_{k(p)} \quad (7-166)$$

وختاماً يمكن ملاحظة الفائدة العملية من استخدام الإحداثيات الطبيعية بملاحظة التبسيط الكبير الذي حصلنا عليه أثناء إجراء التكاملات على العنصر المنتهي.

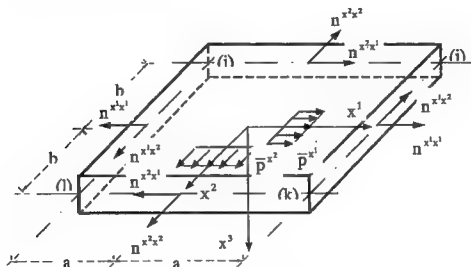
#### 7-4- عنصر شريحة منته مستطيل من النموذج المجهين للإجهادات

يسط مبدأ الطاقة للتممة المعدل والذي يشكل الأساس النظري لهذه الطريقة من الحالة الفراغية للوسط المستمر (العلاقات (78-3)-(79-3)) إلى الحالة المستوية لوسط الشريحة المقسم إلى عناصر منتهية بشكل مشابه لما ورد في الفقرة 5-5 مع مراعاة الحالة الخاصة بالإجهادية ووضعية التشوهات لحالة الشريحة. والعلاقة الناتجة مماثلة لتلك المعطاة في العلاقة (63-5) وهي كالتالي:

$$\delta \pi_{ch} = \delta \left\{ \left[ \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} \cdot s_{ijkl} \cdot \sigma^{kl} \cdot dV - \int_S p^i_{b,e} \cdot u_i^{b,e} \cdot ds + \int_{S_e} p^i_{b,e} \cdot u_i^{b,e} \cdot ds \right] \right\} = 0 \quad (7.167)$$

لتقييم تعبير الطاقة الداخلية للتممة تستخدم كالمسابق توابع قوى مقطع تقريبية بدلا من استخدام توابع الإجهادات ولذلك تصاغ الطاقة الداخلية المتممة بدلالة قوى المقطع باستخدام العلاقة (7.11) كما يلي:

$$\begin{aligned}\pi_i^* &= \frac{1}{2} \int_v \sigma^{ij} \cdot s_{ijM} \cdot \sigma^N \cdot du = \frac{1}{2} \left( \int_A \frac{1}{t} \cdot n^{ij} \cdot s_{ijM} \cdot \frac{1}{t} \cdot n^M \cdot dA \right) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx^3 \\ &= \frac{1}{2} \int_A n^{ij} \cdot \frac{1}{t} \cdot s_{ijM} \cdot n^M \cdot dA\end{aligned}\quad (7.168)$$



شكل 7-13 : عنصر متتهي مستطيل لشريحة.

لاختيار توابع قوى المقطع يمكن أن نبدأ مثلاً بافتراض تابع الإجهادات ضمن العنصر المتتهي. لنفترض أن هذا التابع تام ويمثل بكافة حدود المرتبة الرابعة من مثلث باسكال أي أنه يحوي خمسة عشر حداً وهي التالية :

$$\begin{aligned}F(x^1, x^2) &= c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 (x^1)^2 + c_4 (x^1 x^2) + c_5 (x^2)^2 + c_6 (x^1)^3 \\ &+ c_7 (x^1)^2 x^2 + c_8 x^1 (x^2)^2 + c_9 (x^2)^3 + c_{10} (x^1)^4 + c_{11} (x^1)^3 x^2 \\ &+ c_{12} (x^1)^2 (x^2)^2 + c_{13} x^1 (x^2)^3 + c_{14} (x^2)^4\end{aligned}\quad (7.169)$$

يلاحظ أن هذا التابع لا يحقق للمعادلة التفاضلية ( $F=0$ ) واستخدام مبدأ الطاقة المتتمة المعدل لا يحوي مثل هذه المتطلبات وإنما يجب فقط أن تحقق توابع قوى المقطع المشتقة علاقات التوازن



على المستوي التفاضلي للعنصر. ولهذا الغرض يجري اشتقاق توابع قوى المقطع وفق العلاقات (7.31) لحالة عنصر غير عمل أو وفق المعادلتين الأولى والثانية من العلاقات (7.31) مع العلاقات (7.32) لحالة عنصر منته عمل بمحمولة موزعة بانتظام. وللحالة الأخيرة تكون توابع قوى المقطع كالتالي:

$$\begin{aligned}n^{x^1x^1} &= 2c_3 + 2c_6x^1 + 6c_9x^2 + 2c_{12}(x^1)^2 + 6c_{14}x^1x^2 + 12c_{14}(x^1)^2 \\n^{x^2x^1} &= -c_4 - 2c_7x^1 - 2c_8x^2 - 3c_{11}(x^1)^2 - 4c_{12}x^1x^2 - 3c_{13}(x^2)^2 - x^2\bar{p}^{x^1} - x^1\bar{p}^{x^2} \\n^{x^1x^2} &= -c_4 - 2c_7x^1 - 2c_8x^2 - 3c_{11}(x^1)^2 - 4c_{12}x^1x^2 - 3c_{13}(x^2)^2 - x^2\bar{p}^{x^1} - x^1\bar{p}^{x^2} \\n^{x^2x^2} &= 2c_3 + 6c_6x^1 + 2c_7x^2 + 12c_{10}(x^1)^2 + 6c_{11}x^1x^2 + 2c_{12}(x^2)^2\end{aligned}\quad (7.170)$$

وبالانتقال من الثوابت  $c$  إلى الثوابت بالتركيب الخطي التالي:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 2c_3; \beta_2 = c_4; \beta_3 = c_5; \beta_4 = 6c_5 \\ \beta_5 &= 2c_7; \beta_6 = 2c_8; \beta_7 = 6c_9; \beta_8 = 12c_{10} \\ \beta_9 &= 6c_{11}; \beta_{10} = 2c_{12}; \beta_{11} = 6c_{13}; \beta_{12} = 12c_{14}\end{aligned}\quad (7.171)$$

نحصل بعد كتابة العلاقات (7.170) بالطريقة المصفوفية على التابع الافتراضي التالي:

$$\begin{bmatrix} n^{x^1x^1} \\ n^{x^2x^1} \\ n^{x^1x^2} \\ n^{x^2x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 \\ -1 & -x^1 & -x^2 \\ -1 & -x^1 & -x^2 \\ 1 & x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x^1)^3 & x^1x^2 & (x^2)^3 \\ -\frac{1}{2}(x^1)^2 & -2x^1x^2 & -\frac{1}{2}(x^2)^2 \\ -\frac{1}{2}(x^1)^2 & -2x^1x^2 & -\frac{1}{2}(x^2)^2 \\ (x^1)^2 & x^1x^2 & (x^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \\ \beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x^2 & -x^1 \\ -x^2 & -x^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{p}^{x^1} \\ \bar{p}^{x^2} \end{bmatrix}$$

$$n^{ij} = p^{ijkl} \cdot \beta_{kl} + \bar{p}^{ij} \cdot \bar{\beta} \quad ; i, j = x^1, x^2; k = 1, 2; l = 1, 2, \dots, 6 \quad (7.172)$$

والتابع المفترض هذا يحقق المتطلبات التي ورد ذكرها في الفقرة 5-2-5. ويتم هذا التابع تقييم الطاقة الداخلية المتممة بشكل مطابق لما ورد في العلاقات (6-208) وحتى (6-211).

$$\pi_i^* = \frac{1}{2} \beta_{kl} \cdot H^{kl} \cdot \beta_{op} + \frac{1}{2} \beta_{kl} \cdot \bar{H}^{kl} \cdot \bar{\beta} + c_1 \quad (7.173)$$

حيث:

$$H^{kl} = \int_A p^{ijkl} \cdot s'_{ijmn} \cdot p^{mnop} \cdot dA \quad (7.174)$$

$$\bar{H}^{kl} = \int_A p^{ijkl} \cdot s'_{ijmn} \cdot \bar{p}^{mn} \cdot dA \quad (7.175)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \bar{\beta} \left( \int_A \bar{p}^{ij} \cdot s'_{ijmn} \cdot \bar{p}^{mn} \cdot dA \right) \bar{\beta} \quad (7.176)$$

والقرآن الجديدة المستخدمة تتحول بالشكل 6  $p=1,2$  ;  $m,n=x^1, x^2$  ;  $o=1,2$  أما

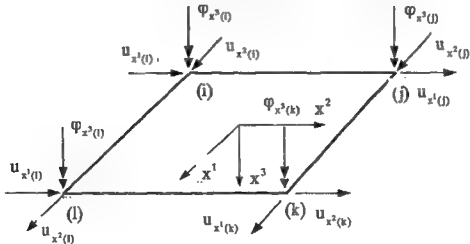
$$s'_{ijmn} \text{ فهي مساوية لـ } \frac{1}{t} s_{ijmn}$$

يمثل الحد الثاني من العلاقة (7.167) عمل القوى السطحية الطرفية، وتنتج هذه القوى من التابع التقريبي لقوى المقطع بتعويض معادلات الأطراف الأربعة للعنصر المنتهي في العلاقات (7.172).

$$\begin{bmatrix} -n^{x^1,1}_{(00)} \\ -n^{x^1,1}_{(01)} \\ n^{x^1,1}_{(00)} \\ n^{x^1,1}_{(01)} \\ n^{x^1,1}_{(10)} \\ n^{x^1,1}_{(11)} \\ -n^{x^1,1}_{(01)} \\ -n^{x^1,1}_{(00)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -x^1 & b & & -(x^1)^2 & x^1b & -b^2 & \\ & 1 & x^1 & -b & & \frac{1}{2}(x^1)^2 & -2x^1b & \frac{1}{2}b^2 \\ & & 1 & a & x^2 & & a^2 & ax^2 \\ -1 & & -a & -x^2 & & -\frac{1}{2}a^2 & -2ax^2 & -\frac{1}{2}(x^2)^2 \\ 1 & & x^1 & b & & (x^1)^2 & x^1b & b^2 \\ -1 & & -x^1 & -b & & -\frac{1}{2}(x^1)^2 & -2x^1b & -\frac{1}{2}b^2 \\ & -1 & a & -x^2 & & & -a^2 & ax^2 \\ 1 & & -a & x^2 & & \frac{1}{2}a^2 & -2ax^2 & \frac{1}{2}(x^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b & x^1 \\ -x^2 & -a \\ -b & -x^1 \\ x^2 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x^1 \\ p_{x^1} \\ p_{x^2} \end{bmatrix} \quad (x^2)^2 \quad -(x^2)^2$$

$$p^i_{b,e} = R^{kl}_{b,e} \cdot \beta_{kl} + \bar{R}^i_{b,e} \cdot \bar{\beta} \quad ; b,e=(i)(j);(j)(k);(k)(l);(l)(i) \quad (7.177)$$

يلاحظ الآن أن  $b,e$  استخدمت كقارئ تحول على أطراف العنصر المنتهي.



شكل 7-14: درجات الحرية لعنصر الشريحة.

كما رأينا في تطبيق الطريقة المحبنة-غودج الإجهادات يمكن افتراض توابع الانتقالات على أطراف  
العنصر المنتهي باستقلالية تامة. يفترض شعاع انتقالات الأطراف الموافق لشعاع قسوى المقطع  
الطرفية على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} u_{i,n} \\ u_{j,n} \\ u_{k,n} \\ u_{l,n} \\ u_{i,n} \\ u_{j,n} \\ u_{k,n} \\ u_{l,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\theta^2) & h_1^1 & sh_1^1 & h_1^1 & sh_1^1 & & & \\ & \frac{1}{2}(1+\theta^2) & h_2^1 & & & & & \\ & & h_2^2 & sh_2^2 & h_2^2 & & & \\ & & & \frac{1}{2}(1-\theta^2) & & & & \\ & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^2) & & & \\ & & & & & h_3^1 & -sh_3^1 & \\ & & & & & \frac{1}{2}(1-\theta^2) & & \\ & & & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^2) & \\ & h_3^2 & -sh_3^2 & & & & & \\ & & & \frac{1}{2}(1-\theta^2) & & & & \\ & & & & \frac{1}{2}(1+\theta^2) & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i,n} \\ u_{j,n} \\ u_{k,n} \\ u_{l,n} \\ u_{i,n} \\ u_{j,n} \\ u_{k,n} \\ u_{l,n} \end{pmatrix}$$

$$u_i^{b,e} = L_i^{b,cm(n)} \cdot u_{m(n)} ; m=1,2,3 ; (n)=(i),(j),(k),(l) \quad (7.178)$$

والتوابع المذكورة في العلاقة السابقة مطابقة لثلاثها المعطاة في العلاقة (6.215). وشعاع انتقالات  
العقد  $u_{m(n)}$  مبين على الشكل 7-14 .

بالتابع التقريبي للانتقالات (7.178) وتوابع القوى السطحية الطرفية (7.177) يقيم الحد الثاني  
من الطاقة المتحممة المعملة (7.167) كالآتي:

$$T = \int_{\Omega} p_{b,e}^i \cdot u_i^{b,e} \cdot ds = \beta_{kl} \cdot T^{klm(n)} \cdot u_{m(n)} + \bar{\beta} \cdot \bar{T}^{m(n)} \cdot u_{m(n)} \quad (7.179)$$

(n),m قرائن سابقة انتفت الحاجة لها وقد استخدمت من جديد بقيم مختلفة.

حيث:

$$T^{klm(n)} = \int_{\Omega} R_{b,e}^{ikl} \cdot L_i^{b,cm(n)} \cdot ds \quad (7.180)$$

$$\bar{T}^{m(n)} = \int_{\Omega} \bar{R}_{b,e}^i \cdot L_i^{b,cm(n)} \cdot ds \quad (7.181)$$

ولتقييم عمل القوى الخارجية المؤثرة على أطراف العنصر المنتهي ترتب هذه الأخيرة في شعاع.

$$\bar{p}_{b,e}^{-1} = \left\{ \begin{matrix} \bar{p}_{(X)D}^{-x^2} & \bar{p}_{(X)D}^{-x^1} & \bar{p}_{(X)D}^{-x^1} & \bar{p}_{(X)D}^{-x^1} & \bar{p}_{(X)D}^{-x^2} & \bar{p}_{(X)D}^{-x^1} & \bar{p}_{(X)D}^{-x^1} & \bar{p}_{(X)D}^{-x^1} \end{matrix} \right\} \quad (7.182)$$

وحلولة كل طرف من الأطراف يمكن تقريبها بتابع من الدرجة الثانية، فمثلاً حولة الطوف (i)(j) يمكن كتابته بشكل مماثل للعلاقة (6.186) وتوابعه التقريبية  $A_0$  مماثلة لتلك الواردة في العلاقة (6.224):

$$\bar{p}_{(X)D}^{-1} = [A_1 \quad A_2 \quad A_3] \cdot \begin{bmatrix} \bar{p}_{(X)D}^{-1} \\ \bar{p}_{(X)D}^{-2} \\ \bar{p}_{(X)D}^{-3} \\ \bar{p}_{(X)D} \end{bmatrix} \quad (7.183)$$

وشعاع القوى الخارجية المؤثرة على الأطراف يأخذ الشكل المصفوفي:

$$\bar{p}_{b,e}^{-1} = A^i_k \cdot \bar{p}_{b,e}^{-k} \quad (7.184)$$

$\bar{p}_{b,e}^{-k}$  تشير إلى قيم الحمولات الخارجية المعطاة لوصف توابع الحمولة مرتبة وفق التسلسل الوارد للشعاع  $\bar{p}_{b,e}^{-1}$  العلاقة (7.182).  $A^i_k$  تمثل توابع الشكل مكررة بعدد تكرار توابع الحمولات (ثمان مرات كما تشير العلاقة (7.182)).

يمكن الآن تقييم الحد الأخير من العلاقة (7.167) بالشكل:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \int_{s_{b,e}} \bar{p}_{b,e}^{-1} \cdot u_i^{b,e} \cdot ds = \bar{p}_{b,e}^{-k} \left( \int_{s_{b,e}} A^i_k \cdot L_i^{b,em(n)} \cdot ds \right) u_m(n) \\ &= \bar{s}^{-m(n)} \cdot u_m(n) \end{aligned} \quad (7.185)$$

حيث:

$$\bar{s}^{-m(n)} = \bar{p}_{b,e}^{-k} \int_{s_{b,e}} A^i_k \cdot L_i^{b,em(n)} \cdot ds \quad (7.186)$$

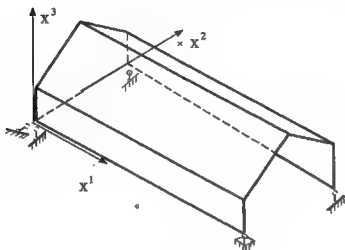
هنا يجب ملاحظة أن  $b,e$  قرينة تعبر عن تنالي أطراف العنصر المنتهي وتأخذ القيم:

(i)(i), (k)(l), (j)(k), (i)(j) على التوالي.

يتم تجميع الطاقة المتمدة للعدلة بالشكل المألوف على مستوى العنصر وتحسب الجاهيل بدلالة انتقالات العقد بعد أخذ المتغير الأول للطاقة المتمدة للعدلة على مستوى العنصر. وخطوات الاشتقاق الواردة في العلاقات (5.86) وحتى (5.98) ولاداعي لتكرارها والاختلاف الوحيد هنا

هو في تحويل مصفوفات العنصر للشريحة من المحاور الإحداثية الخاصة إلى المحاور الإحداثية العام .  
وعلى القارئ استنتاجها بنفسه على غرار ما فعلناه لحالة البلاطة الرقيقة وحالات أخرى.

#### 7-5- عنصر منتهي مستطيل هجين لحل مسائل المنشآت المثنية المستوية:



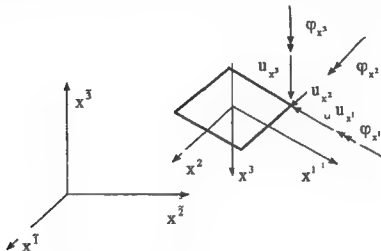
شكل (7-15): منشأ مثني مستوي.

المنشآت المثنية المستوية هي هندسيا عبارة عن منشآت مركبة من سطوح متعددة تلتقي سطوحها في حروف أو زوايا (شكل 7-15). وقد تكون أحيانا سطوحها منحنية. وتصنف هذه المنشآت عادة حسب شكلها فنجد فيها المنشآت الموشورية والهرمية والنصف هرمية ومنشآت مثنية منحنية. تتميز هذه المنشآت عادة بطبولوجيتها الهندسية غير المستمرة نظرا لوجود حروف أو زوايا فيها وبالتالي تكون التوابع التي تصف هذه السطوح غير مستمرة حيث يكون مشتقها الأول عند نقاط الانكسار مختلفا ويقال عنها أنها لا تحقق شرط الاستمرارية  $C^1$ .

تستخدم عادة الطريقة المهيمنة لحل مثل هذه المنشآت وذلك بغية التخلص من شروط الاستمرارية الواجب تحقيقها عند استخدام الطرق الأخرى.

وبتوافر المعطيات الأساسية للعنصر المنتهي -النموذج المهيمن لدراسة البلاطات وللعنصر المنتهي- النموذج المهيمن لدراسة الشرائح والمعرضين في الفصل السادس والسابع من هذا الكتاب. تتوفر

المعطيات الأساسية للعنصر المنتهي في حل المنشآت المثنية المستوية. إذ أن العنصر هذا ليس إلا تركيب للعنصرين السابقين.



شكل 7-16: عنصر منتهي مثني مستوي مستطيل.

لنتأمل الشكل 7-16، فدرجات الحرية لعقدة ما في الفراغ هي ستة وهي الانتقالات في اتجاه المحاور الإحداثية الثلاثة والدورانات حولها. ثلاثة منها تميز درجات الحرية للشريعة وهي:  $u_x, u_y, u_z$  والأخرى تميز درجات الحرية للبلاطة وهي:  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ . وتتميز طبيعة عمل العنصر المثني المستوي باحتوائها على طبيعة عمل الشريعة. وطبيعة عمل عنصر البلاطة في نفس الوقت. وعليه يتركب شعاع انتقالات عقدة ما من عنصر مثني مستوي من درجات الحرية الستة هذه:

$$\begin{aligned} u_f &= \{u_s, u_p\} \\ u_s &= \{u_x^0, u_y^0, \phi_z^0\}, u_p = \{u_x^0, \phi_x, \phi_y\} \end{aligned} \quad (7.187)$$

وتستخدم الأحرف  $p, s, f$  للدلالة على قيم التأثير المميزة للعنصر المثني المستوي وعنصر الشريعة وعنصر البلاطة على التوالي.

ويتركب تابع القوى المقترض لعنصر مثني مستوي من تابعين أولهما عائد لعنصر الشريعة وبحوي قوى للمقطع:  $\{n^{x^1x^1}, n^{x^2x^1}, n^{x^1x^2}, n^{x^2x^2}\}$  (7.172)

وثانيهما عائد للبلاطة ويجوي قوى المقطع  $\{m^{x^1}, m^{x^2}, m^{x^3}, m^{x^4}\}$  وتابعها بالتابع المفترض (6.207).

$$s_r = \{p_s, m_p\} \quad (7.188)$$

كما يتركب تابع الانتقالات الطرفية  $u_i^{pb,e}$  من جزأين أولهما حصاص بالشريعة  $u_i^{sh,e}$  ويمثل بالعلاقة (6.213).

$$u_i^{pb,e} = \{u_i^{sh,e}, u_i^{pb,e}\} \quad (7.189)$$

وكذلك الأمر بالنسبة لتتابع قوى المقطع الطرفية  $p_{pb,e}^i$  والمثلة بالجزأين  $p_{sh,e}^i$  المعطى بالعلاقة (7.177) و  $p_{pb,e}^i$  المعطى بالعلاقة (6.212).

$$p_{pb,e}^i = \{p_{sh,e}^i, p_{pb,e}^i\} \quad (7.190)$$

وتجمع أيضا القوى الخارجية المؤثرة على أطراف العنصر المثني المستوي  $\bar{p}_{pb,e}^i$  من الجزء الخاص بالشريعة  $\bar{p}_{sh,e}^i$  وهو معطى بالعلاقة (7.184) ومن الجزء الخاص بالبلاطة  $\bar{p}_{pb,e}^i$  وهو معطى بالعلاقة (6.187).

$$\bar{p}_{pb,e}^i = \{\bar{p}_{sh,e}^i, \bar{p}_{pb,e}^i\} \quad (7.191)$$

وعلى هذا الأساس تكون مصفوفات العنصر (على سبيل المثال  $\bar{S}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{H}, \bar{H}$ ) للعنصر المثني المستوي ما هي إلا تجميع لماترائز لحالة الشريفة والمستنتجة في الفقرة 4-7 وتلك لحالة البلاطة والمستنتجة في الفقرة 5-6. والعلاقة التالية تمثل هذا التجميع:

$$K_r = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_p \end{bmatrix} \quad (7.192)$$

$K_p$ : مصفوفة التساوة للعنصر المثني المستوي.  $K_s$ : مصفوفة التساوة للشريعة.

$K_p$ : مصفوفة التساوة للبلاطة.

وكأحد الأمثلة العملية لاستخدام العناصر المنتهية المثنية المستوية المشروحة في الفقرة 5-7 يدرس إطار طابقي فراغي (شكل 7-17-1) مقوى ببلاطات تغطية بيتونية. تتواجد على سطوح البلاطات كتلة إضافية موزعة بانتظام اعتبرت ككتافة إضافية لمادة البلاطات وهذا ما يفسر الكثافة الذاتية المرتفعة لهذه البلاطات. صنعت بلاطات التغطية من صنف البيتون BK35 وفق المواصفات

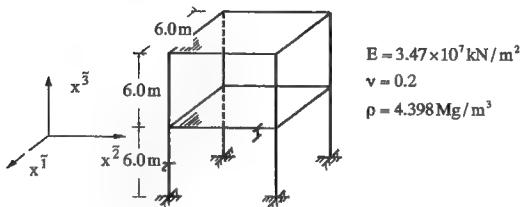


المعيارية الألمانية. وأعمدة الإطار الطابقي وجوائز المتوسطة تحت الأطراف الأربعة لكل بلاطة تمتلك المقطع 1400 وفق المواصفات المعيارية الألمانية.

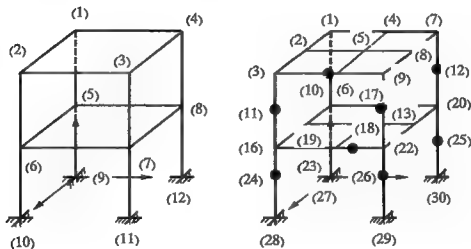
يدرس المنشأ تحت تأثير حالات تحميل مختلفة وبتقسيمين شبكيين. التقسيم الشبكي الأول يمثل الشكل 7-17-ب، ويتألف من عنصرين مشين مستويين حيث اعتبرت كل بلاطة تغطية بأكملها كعنصر منتهي، ومن ستة عشر عنصراً منتهياً إطارياً فراغياً حيث أخذ القضيبي بأكمله كعنصر منتهي. والتقسيم الشبكي الثاني يتألف من ثمانية عناصر منتهية مشية مستوية واثنا عشر ثلاثون عنصراً منتهياً إطارياً فراغياً (شكل 7-17-ج). وقد نسب المنشأ إلى جملة محاور إحدائية عامة ونسب كل عنصر منتهي إلى جملة محاور إحدائية خاصة.

تمثل حالات التحميل التي درس المنشأ تحت تأثيرها بأربعة حالات تحميل وهي حالتين لكل تقسيم شبكي. حالتي التحميل للتقسيم الشبكي للمبين في الشكل (7-17-ب) مثلت في الشكلين (7-18-أ) و (7-18-ب). والحمولات متساوية على أركان البلاطات الأربعة وهي متساوية أيضاً في منتصف أطراف البلاطات بالنسبة للتقسيم الشبكي الثاني. ومثلت العزوم  $M_T$  المنسوبة إلى جملة المحاور الإحدائية العامة والناشئة عن حالتي التحميل السابقتين في الشكلين (7-18-ج) و (7-18-د). وحالتي التحميل للتقسيم الشبكي للمبين في الشكل (7-17-ج) مثلت في الشكلين (7-19-أ) و (7-19-ب) والعزوم  $M_T$  الناشئة عنها في الشكلين (7-19-ج) و (7-19-د). وقد استغني عن تمثيل العزوم الناشئة في بلاطات التغطية لضعفها بالنسبة للعزوم المتمتصة من قبل القضبان الإطارية. واستغني أيضاً عن كتابة مقادير العزوم المتماثلة على الأشكال السابقة، إذ بإمكان القارئ استنتاجها من دراسته لحالة تناظر الحمولات. ولكي نوضح للقارئ طبيعة هذه الحمولات ولماذا اختيرت بهذا الشكل نود أن نذكر هنا أن الحمولات السابقة ناشئة عن دراسة المنشأ الإطارى الفراغى تحت تأثير الزلازل بطريقة طيوف التحاوب الخطية وهي الحمولات الستاتيكية المكافئة لتأثير تسارع أرضي في قاعدة المنشأ مقداره  $1.08 \text{ m/sec}^2$ . وقد شكلت مصفوفات المساواة العامة من مصفوفات العناصر للبلاطة والشرجة وقضيبي الإطار الفراغى. والمثال يهدف قبل أي شيء إلى إعطاء القارئ لمحة بسيطة عن إمكانية استخدام العناصر السابقة في

التطبيقات العملية وربما حسابات مقارنة في حال أراد القارئ تطوير العناصر السابقة بنفسه في برنامج حساب بطريقة العناصر المنتهية.

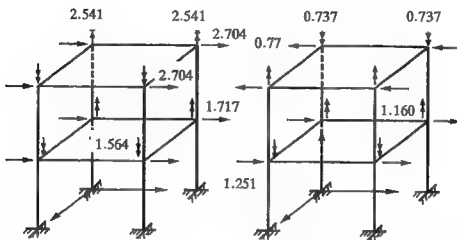


شكل 7-17-أ) منشأ إطاري فراغي ببلاطات تغطية بيتونية أفقية



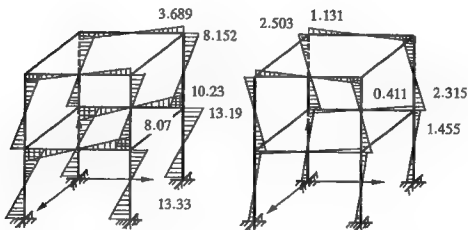
شكل 7-17-ج: التقسيم إلى عناصر منتهية      شكل 7-17-ب: التقسيم إلى عناصر منتهية

8 عناصر مثنية مستوية ، 32 عنصر إطارى  
عنصران مثنيان مستويان ، 16 عنصر إطارى  
فراغى، ترقيم العناصر . فراغى ، ترقيم العناصر .



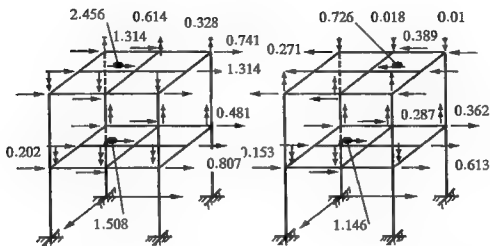
شكل 7-18-1 حالة التحميل ب

شكل 7-18-1 حالة التحميل أ



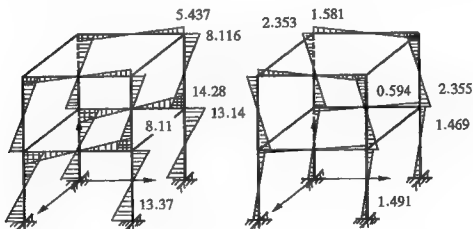
شكل 7-18-2 حالة التحميل ب  $M_T$

شكل 7-18-2 حالة التحميل أ  $M_T$  العزم



شكل 7-19-ب) حالة التحميل ب

شكل 7-19-أ) حالة التحميل أ



شكل 7-19-د)  $M_T$  حالة التحميل ب

شكل 7-19-ج)  $M_T$  حالة التحميل أ

## المصادر العلمية:

استخدمت بالإضافة إلى مصادر التفصيل الخامس والساحس المصادر التالية:

- 1-Mueller,H.  
Arbeitsblaetter fuer den Weiterbildungslehrgang  
Rechner orientierte Kontinuumsmechanik-Einfuehrung in die Methode  
der finiten Elemente. TU Dresden 1984
- 2- Mueller,H.;Moeller,B.  
Lineare und physikalisch nichtlineare statik von Falt-werken Baustein 1  
und 2 des programm systems FALT-FEM Grundlage und Beispiele;  
Bauforschung-Baupraxis Bauinformation der DDR,Berlin 1985 ;  
Heft 155.
- 3- Mattheiss  
Platten und Scheiben  
Werner Verlag,Duesseldorf,1982.
- 4- Mueller,H.;Moeller,B.;Hoffman,A.;Abo Diab,S.  
Faltwerksmechanik mit FALT-FEM-Kinetik und Stabilitaet  
sowie neuere Anwendungsfaelle  
Bauplanung-Bautechnik,4(1987) 1,s.30-30
- 5- Moeller,B.  
Nichtlineare Statik von Stahlbeton-Faltwerken  
TU Dresden,Forschungsbericht 1983.
- 6- Mueller,H.;Moeller,B.  
Ein hybrides mehrschichtiges Faltwerkelement  
Wissenschaftlische Zeitschrift der TU Dresden,Heft 5,1979.

**7- Baumgaertel, W.**

Erweiterungen zur Statik von Faltwerken im Rahmen  
von FALT-FEM 1 und 2 und Aufbau einer PL-Version  
TU Dresden, Diss., 1989.

**8- Poerschmann, H. (Hrsg.)**

Bautechnische Berechnungstabellen fuer Ingenieure  
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1984.

الملحق الأول :

مثلث باسكال ، كثيرات حدود لاغرنج كثيرات حدود من نموذج Serendipity

تسمى عملية إيجاد تابع تقريبي ما  $\hat{g}(x^1)$  من مجموعة معينة من التوابع  $G$  ( مجموعة كسرات الحدود ، مجموعة التوابع المثلثية ، التوابع القطعية ، التوابع الأسية ، ... ) والذي تختلف قيمته عن قيمة تابع ما  $f(x^1)$  غير منتمي للمجموعة  $G$  أقل اختلاف ممكن بعملية التقريب أو ما يطلق عليها (Approximation) . و كمقياس لاختلاف قيم التابع التقريبي عن التابع المقرب يوجد ما يسمى بالمعيار النصفى وهو العدد  $\| \ell(x^1) \|$  الذي يخص التابع  $\varphi(x^1)$  المنتمي إلى مجموعة تابعة  $V$  و يحقق الخواص التالية :

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &\geq 0; \text{ for all } \varphi \in V \\ \|a\varphi\| &\geq |a|\|\varphi\|; \text{ for all } a \in \mathbb{R}, \varphi \in V \end{aligned} \quad (1)$$

$$\|\varphi + \phi\| \leq \|\varphi\| + \|\phi\| \text{ for all } \varphi, \phi \in V$$

$\mathbb{R}$  مجموعة الأعداد الحقيقية ،  $a$  قيمة من  $\mathbb{R}$  ،  $\phi$  تابع كـ  $\varphi$  من المجموعة  $V$  . و المسألة المطروحة في عملية التقريب يمكن التعبير عنها رياضياً بمايلي :

لأجل تابع معطى  $f \in V$  يجب إيجاد التابع  $\hat{g} \in G$  المحقق للشرط :

$$\|f - \hat{g}\| = \inf \|f - g\| \text{ or } \|f - \hat{g}\| \leq \|f - g\| \quad (2)$$

من أجل أي تابع آخر  $g$  من المجموعة  $G$  . يسمى المقدار :

$$D_G(f) = \inf_{g \in G} \|f - g\| \quad (3)$$

بالانحراف الأصغري عن  $f$  ،  $\hat{g}$  يتعلق بالمجموعة  $G$  . في حال وجود التابع  $\hat{g}$  المحقق للشرط (2) يسمى هذا التابع بأفضل تقريب لـ  $f$  في المجموعة  $G$  . و تختلف مسائل التقريب عن بعضها البعض بالمعيار النصفى المتخذ  $\varphi$  أو المجموعة التي يتم فيها التقريب  $G$  . في حالة استعمال ما يسمى التقريب الخطي تكون المجموعة  $G$  فراغا خطيا . و في مسائل الحساب العددي يكون عبارة الفراغ  $G = G_0$  فراغا محدود الأبعاد حيث يمكن لأي تابع  $g(x^1)$  من  $G_0$  أن يكون تركيبا خطيا من توابع مستقلة خطيا متممة إلى  $G_0$  ( توابع القاعدة ) بالشكل :

$$g(x^1) = a_1 g^1(x^1) + a_2 g^2(x^1) + \dots + a_n g^n(x^1) \quad (4)$$

و التوابع المستقلة الشائعة الاستعمال في التقريب هي كثيرات الحدود بالأمثال الحقيقية و تكسون توابع قاعدتها الواردة في (4) كمايلي :

$$g^1(x^1) = 1; g^2(x^1) = x^1; g^3(x^1) = (x^1)^2; \dots; g^n(x^1) = (x^1)^{n-1} \quad (5)$$

و هناك أيضاً التوابع المثلثية ، التي يتركب فيها التابع من كثير حدود مثلني :

$$\hat{g}(x^1) = c/2 + \sum_{i=1}^n c_i \cos ix^1 + \sum_{j=1}^n d_j \sin jx^1 \quad (6)$$

و بما يتعلق بالمعيار النصفى المتخذ هناك أنواع من التقريب يكتفى بذكرها و هي تقريب Tschebyschow و التقريب للمربع .

الآن في فراغ ثنائي الأبعاد متحولاته المستقلة  $x^1, x^2$  تشكل بانتظام التراكيب :

$$g(x^1, x^2) = (x^1 + x^2)^n; n = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (7)$$

وحتى المرتبة السادسة تكون هذه التراكيب كالتالي:

$(x^1 + x^2)^0 \rightarrow$	درجة أولى
$(x^1 + x^2)^1 \rightarrow$	درجة ثانية
$(x^1 + x^2)^2 \rightarrow$	درجة ثالثة
$(x^1 + x^2)^3 \rightarrow$	درجة رابعة
$(x^1 + x^2)^4 \rightarrow$	درجة خامسة
$(x^1 + x^2)^5 \rightarrow$	درجة سادسة

فإذا رتبنا مناسير هذه التراكيب بعد حذف أمثال المتحولات حصلنا على التركيب الهرمي :

			1			
		$x^1$		$x^2$		
		$(x^1)^2$		$x^1 x^2$		$(x^2)^2$
	$(x^1)^3$		$(x^1)^2 x^2$		$x^1 (x^2)^2$	$(x^2)^3$
$(x^1)^4$		$(x^1)^3 x^2$		$(x^1)^2 (x^2)^2$		$x^1 (x^2)^3$
$(x^1)^5$	$(x^1)^4 x^2$		$(x^1)^3 (x^2)^2$		$(x^1)^2 (x^2)^3$	

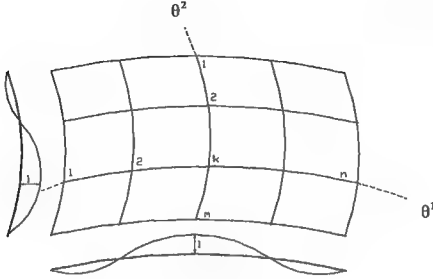


حيث يوجد في كل سطر كافة المتحولات المستقلة الموجودة في منشور الدرجة الموافقة لرقم السطر . يطلق على التركيب الهرمي السابق اسم مثلث باسكال . فلو كتبنا أمثال مفكوك التركيب السابقة لتشكل أيضاً المثلث التالي للمسمى أمثال مثلث باسكال:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

يلاحظ في مثلث باسكال الرتبة في استنباط الحدود ، إذ أن كل درجة من توابع باسكال تحتوي كافة التباديل الممكنة للمتحوّلين المستقلين بحيث يكون المجموع الأسّي لهما مساو لدرجة كثير الحدود نفسها . كما أن أي حد من حدود درجة معينة في مثلث المتحولات المستقلة ينتج من ضرب الحدّين الواقعين فوقه للدرجة الأدنى ببعضهما البعض و أمثال الحد المقصود في مثلث الأمثال تنتج بجمع الحدّين المذكورين . و يلاحظ أن مشتق كثير حدود من درجة ما سواء بالنسبة لـ  $x^1$  أو لـ  $x^2$  يحوي كافة حدود الدرجة الأدنى . هذا يعني أن هذه التوابع يمكن أن تحقق شروط الاستمرارية من المرتبة الأولى . ( الاستمرارية  $C^1$  ) عند استخدامها لوصف حالة الانتقالات لسطح إنشائي ما . و باعتبار أن استنباط حدود الدرجات العليا يتم بنظامية من الدرجات الأدنى يقال عن هذه التوابع بأنها تامة . و توابع باسكال هذه تحقق كل شروط التقارب إلى الحل الدقيق المفترض أن تحققها التوابع التقريبية للعناصر المنتهية . و لكن من المؤسف عدم تطابق عدد حدود توابع باسكال مع عدد درجات الحرية مضروباً بعدد عقد العنصر لغالبية العناصر المنتهية . و في قليل من العناصر يتطابق هذان العدداً كالعنصر المنتهي المثلث الخطي و العنصر المنتهي المربع الخطي . يذكر بأن الدراسة السابقة سارية المفعول أيضاً للإحداثيات الطبيعية

توابع لاغرنج :



شكل a1 : نقاط الاستناد وتوابع لاغرنج

لنفرض أنه لدينا عنصر منتهي نود فرض التوابع التقريبية للاتصالات فيه بحيث تكون قيمة هذا التابع واحد في عقدة ما ( $k$ ) فيه ، و لتكن المحاطة بدائرة و في بقية العقد الأخرى مساوية للصفر . لرسم شبكة من الخطوط الإحداثية و لتكن للموافقة للإحداثيات الطبيعية  $(\theta^1, \theta^2)$  والتي تتقاطع فيما بينها في العقد . على الخط الإحداثي  $\theta^1$  حيث يكون  $\theta^2$  ثابتاً لنفرض أنه تشكلت لدينا  $n$  عقدة . على هذا الخط يمكن فرض تابع تقريبي متعلق بالإحداثي  $\theta^1$  فقط و يملك في العقدة ( $k$ ) القيمة 1 و في بقية العقد الأخرى القيمة صفر . و التابع التقريبي التالي يملك مثل هذه الخاصية :

$$L^n(k) = \frac{(\theta^1 - \theta^1_{(1)})(\theta^1 - \theta^1_{(2)}) \dots (\theta^1 - \theta^1_{(k-1)})(\theta^1 - \theta^1_{(k+1)}) \dots (\theta^1 - \theta^1_{(n)})}{(\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(1)})(\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(2)}) \dots (\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(k-1)})(\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(k+1)}) \dots (\theta^1_{(k)} - \theta^1_{(n)})} \quad (7)$$

بالفعل إذا عوضنا الإحداثي  $\theta^1$  بقيمته عند العقدة ( $k$ ) و هي  $\theta^1_{(k)}$  في العلاقة السابقة تكون قيمة  $L^n(k)$  مساوية للواحد ، و عند تعويض قيمة الإحداثي  $\theta^1$  لأي عقدة أخرى يأخذ التابع

التقريبي السابق القيمة صفر . و بالمثل على الخط الإحداثي  $\theta^2$  حيث يكون  $\theta^1$  ثابتا و تتشكل عليه  $m$  عقدة يفرض التابع التقريبي متعلق بالإحداثي  $\theta^2$  فقط على نفس الشاكلة :

$$L^m_{(k)} = \frac{(\theta^2 - \theta^2_{(1)})(\theta^2 - \theta^2_{(2)}) \dots (\theta^2 - \theta^2_{(k+1)})(\theta^2 - \theta^2_{(k+2)}) \dots (\theta^2 - \theta^2_{(m)})}{(\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(1)})(\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(2)}) \dots (\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(k-1)})(\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(k+1)}) \dots (\theta^2_{(k)} - \theta^2_{(m)})} \quad (8)$$

يفترض الآن تابع الشكل على مساحة العنصر والموافق للعقدة  $(k)$  كجلاء للتابعين  $L^m_{(k)}, L^n_{(k)}$

$$N^{mn}_{(k)} = L^m_{(k)} L^n_{(k)} \quad (9)$$

وهذا التابع يحقق خاصية مساواته للواحد في العقدة  $(k)$  والصفر في بقية العقد الأخرى . وهكذا تشكل توابع الشكل الخاصة بكل عقدة . والتابع التقريبي المفترض لكامل العنصر يصبح بمجموع جدايات تابع الشكل الخاص بكل عقدة في درجة الحرية المفترضة للعقدة نفسها . يتضح من طريقة التشكيل لتوابع الشكل أنه باستطاعتنا نظريا الحصول على توابع تقريبية ككثيرات حدود من أي درجة نريدها و ذلك بزيادة عدد عقد العنصر المستخدمة للاستنباط . عمليا يؤدي زيادة عدد العقد إلى ظهور عدد كبير من العقد الداخلية ضمن العنصر والمنفصلة تماما عن عقد العناصر المنتهية الأخرى المجاورة ويجب اعتبارها في جملة المعادلات النهائية لانتقالات العقد ، ومعاملاتها كمجاهيل حيث يجب حسابها مع أنها لا تؤثر رياضيا على العناصر المنتهية الأخرى . وعلاقتها الرياضية أو الإنشائية خاصة بالعنصر المفترض وجودها فيه . كما أن كثيرات الحدود من الدرجات العليا تبدي سلوكا سيئا في تقريبها للإغتمعات . ويلاحظ في كثيرات الحدود الناتجة من طريقة لاخرنج هذه وجود المتحولات المستقلة بدرجات عليا بينما يفتقد أحيانا وجود هذه المتحولات بدرجات دنيا . و هذا يؤدي في كثير من الأحيان إلى خواص عديدة سيئة لمصفوفة القساوة للعناصر المنتهية وتظهر هذه الخواص السيئة جلية أثناء حلول المعادلات النهائية لكامل المنشأ أو أثناء حساب القيم الذاتية لمصفوفة القساوة . ويلاحظ أن، هذه التوابع تنتج أيضا من مثلث باسكال ( في الحالة  $m = n$  ) من أخذ الحدود الواقعة في مساحة معين مقطوع من المثلث .

$$\begin{array}{c}
1 \\
\theta^1 \quad \theta^2 \\
(\theta^1)^2 \quad \theta^1 \theta^2 \quad (\theta^2)^2 \\
(\theta^1)^3 \quad (\theta^1)^2 \theta^2 \quad \theta^1 (\theta^2)^2 \quad (\theta^2)^3 \\
(\theta^1)^3 \theta^2 \quad (\theta^1)^2 (\theta^2)^2 \quad \theta^1 (\theta^2)^3 \\
(\theta^1)^3 (\theta^2)^2 \quad (\theta^1)^2 (\theta^2)^3 \\
(\theta^1)^3 (\theta^2)^3 \\
1 \\
(\theta^1)^n \quad (\theta^2)^n \\
(\theta^1)^n (\theta^2)^n
\end{array}$$

التوابع التقريبية من نموذج Serendipity :

تتصف توابع هذا النموذج بعدم قابلية استنباطها برتبة و نظامية كتوابع لاغرنج الأنفة الذكر . كما أن المقد اللازمة لاستنباط التوابع التقريبية تنحصر عادة في عقد زوايا العنصر و عقد واقعة على أطراف العنصر و من النادر احتياجنا لعقد واقعة ضمن العنصر المنتهي كما هو في الحال في توابع لاغرنج ولكن احتمال مثل هذا الاحتياج وارد و خاصة في كثرات الحدود مسن المراتب العليا . وافترض توابع تقريبية من درجات عليا لهذا النموذج يتطلب عادة خيرة . و هناك إمكانية لافتراض هذه التوابع من المراتب الدنيا بنظامية باقتطاع حدود من مثلث باسكال . و يتم هذا الاقتطاع كما يبين الشكل التالي :

$$\begin{array}{c}
1 \qquad \qquad \qquad 1 \\
\theta^1 \quad \theta^2 \qquad \qquad \theta^1 \quad \theta^2 \\
(\theta^1)^2 \quad \theta^1 \theta^2 \quad (\theta^2)^2 \qquad \qquad \theta^1 \quad \theta^2 \\
(\theta^1)^3 \quad (\theta^1)^2 \theta^2 \quad \theta^1 (\theta^2)^2 \quad (\theta^2)^3 \quad (\theta^1)^m \quad (\theta^2)^m \\
(\theta^1)^3 \theta^2 \quad \theta^1 (\theta^2)^3 \quad (\theta^1)^m \theta^2 \quad \theta^1 (\theta^2)^m
\end{array}$$

والتابع التقريبي الذي افترض ممثلاً لانتقالات سطح العنصر المنتهي للبلابة الرقيقة و المسمى بـ  $ACM$  هو من نموذجنا هذا . يجب الانتباه أثناء افتراض التوابع التقريبية إلى المحافظة على تناظرها بالنسبة لنصف مثلث باسكال و ذلك من أجل ضمان خاصية ثبات خواص العنصر المنتهي أثناء تبديل تسمية المحاور الإحداثية . تختلف مسودة افتراض التوابع التقريبية وفق اختلاف الشكل الهندسي للعنصر المنتهي و بالتالي عدد درجات الحرية المتخذة لكل عقدة. وبالتالي هذه المسودة مختلفة بالنسبة للعناصر المنتهية المثلثية الشكل وعلى القارئ تلبية احتياجاته في مجال معالجة الأشكال الهندسية المختلفة للعناصر المنتهية من المراجع المذكورة في هذا الكتاب أو من مراجع أخرى .

الملحق الثاني :

التكامل العددي :

التكامل العددي هو عملية إيجاد قيم التكاملات المحددة الأحادية أو المتعددة الأبعاد عددياً . فسيكثر من الأحيان و خاصة للتكاملات المحدودة للمتعددة الأبعاد من الصعوبة بمكان إيجاد التابع الأصلي التابع المكامل . يحسب التكامل المحدد الأحادي الأبعاد بالصيغة التريعية العامة :

$$\int_a^b f(x^1) dx^1 = [f] + R_a^b[f] \quad (1)$$

$I_a^b[f]$  قيمة التكامل التقريبية ،  $R_a^b[f]$  الخطأ المتبقي . و يحسب التكامل المحدود المتعدد الأبعاد بالصيغة التكميلية التالية :

$$\int_a^b \dots \int_a^b f(x^1, x^2, \dots, x^m) dx^1 dx^2 \dots dx^m = I_B[f] + R_B[f] \quad (2)$$

$I_B[f]$  قيمة التكامل التقريبية ،  $R_B[f]$  الخطأ المتبقي . في كثير من صيغ التكامل العددي يمكن تخمين الأخطاء المتبقية . و فيما يلي ستعرض الصيغ التريعية للتكامل العددي بإيجاز بينما سيستغنى عن عرضها للصيغ التكميلية .

### صيغ القيمة المتوسطة للتكامل العددي :

فكرة هذه الصيغة بسيطة و تلتخص بما يلي : إذا علمت قيم التابع المراد مكاملته  $y = f(x)$  في النقاط  $x_i$  و لتكن هذه القيم  $y_i = f(x_i)$  حيث  $x_i$  قيم تقع ضمن مجال التكامل  $[a, b]$  أي  $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$  ، عندها يمكن تقريب التابع المراد مكاملته بكثير حدود من الدرجة  $n+1$  ( إذ أن عدد النقاط  $x_i$  المعتبرة  $n+1$  ) والأخير يملك تابعاً أصلياً معروفاً و يمكن حساب تكامله بدقة . والشكل العام لصيغ القيمة المتوسطة للتكامل العددي هو :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{p} \sum_{i=1}^n p^i y_i + R_n[f] \quad (3)$$

حيث  $p^i > 0$  و  $p^1 + p^2 + \dots + p^n = p$  و يطلق عليها أوزان القيم  $y_i$  للتابع  $y(x)$  . و تنتج الصيغ المختلفة المعروفة للتكامل العددي وفق الفرضيات حول عدد و موقع نقاط الاستنباط  $y_i$  أو حول الأوزان  $p^i$  . هناك صيغ متعددة للتكامل العددي تنتج من استخدام توابع لاغرنج المذكورة في الملحق الأول لتقريب التابع للمكامل ، حيث تصبح الصيغة (3) كما يلي :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{nh}{p^n} \sum_{j=0}^n f(a+jh)p^j + R_n[f] \quad (4)$$

حيث :

$$p^n = \sum_{j=0}^n p^j; h = \frac{b-a}{n}; x_0 = a; x_n = b \quad (5)$$

هذه الصيغة العامة تحوي صيغ معروفة في التكامل العددي . فمن أجل  $n=1$  تمثل الصيغة (4) صيغة شبه المنحرف في التكامل العددي ، و من  $n=2$  صيغة سمبسون أو كبلر و من أجل  $n=3$  تمثل صيغة  $(\frac{3}{8} -$  نيوتن ) و الجدول التالي يعطي المعاملات  $p^0, p^1, p^2, p^3$  للصيغ المعروفة هذه :

n	p <sup>a</sup>	p <sup>0a</sup>	p <sup>1a</sup>	p <sup>2a</sup>	p <sup>3a</sup>	p <sup>4a</sup>	p <sup>5a</sup>	p <sup>6a</sup>
1	2	1	1					
2	6	1	4	1				
3	8	1	3	3	1			
4	90	7	32	12	32	7		
5	288	19	75	20	20	75	19	
6	840	41	216	27	272	27	216	41

عند تحويل التكامل العددي إلى تكامل ضمن المجال  $[-1, +1]$  بالشكل :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^n H_i f(x_i) \quad (6)$$

سوف نجد أن صيغة شبه المنحرف و صيغة سمبسون و صيغة نيوتن تمثل على التوالي بالعلاقات :

$$\begin{aligned}
 I &= f(-1) + f(+1) \\
 I &= \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(+1)] \\
 I &= \frac{1}{4} [f(-1) + 3f(-\frac{1}{2}) + 3f(\frac{1}{2}) + f(+1)]
 \end{aligned} \quad (7)$$

و هذه العلاقات تفسر طريقة استعمال معاملات الجدول السابق .

**صيغة غاوس التربيعية :**

هذه الطريقة في إنجاز التكاملات العددية تعتمد في البدء على تحديد عدد نقاط الاستنباط  $x_i$  و ليس على تحديد مواقعها . بعد تحديد عدد نقاط الاستنباط أو نقاط غاوس الوزنية يحاول المرء حساب الأوزان و تحديد إحداثيات نقاط الاستنباط بحيث يكون خطأ التكامل أصغر ما يمكن . فإذا أردنا تحديد التابع التقريبي للمثل لتابع التكامل :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\theta) d\theta = \sum_{i=1}^n H_i f(\theta^i) \quad (8)$$

حيث  $\theta^i$  إحداثيات نقاط الاستنباط ،  $H_i$  أوزان غاوس ، فلعدد  $n$  من هذه النقاط لدينا  $2n$  مجهول ممثلة بقيم التابع  $f(\theta^i)$  و الأوزان  $H_i$  . و كثير الحدود الذي يجب افتراضه للتقريب من الدرجة  $2n-1$  و عطاءً التكامل من الدرجة  $(\Delta^{2n})$  . يبرهن أن للمعادلات الآتية الناتجة عن افتراض التابع التقريبي حلولاً بصيغة ما يعرف بكثيرات حدود Legendre . و في الجدول a2 نجد قيم الإحداثيات  $\theta$  لنقاط الاستنباط و الأوزان  $H$  لأعداد مختلفة من نقاط غاوس. أثبتت صيغة غاوس التريعية جدارتها للاستخدام في تطوير مصفوفات العنصر للعناصر المنتهية ذات الطولوجة الهندسية المعقدة . و سوف ترمج هذه الطريقة لتطوير مصفوفة القساوة لعنصر البلاطة ACM في الملحق الثالث من هذا الكتاب .

n	$\pm \theta$			H		
1	0.00000	00000	00000	2.00000	00000	00000
2	0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
	0.77459	66692	41483	0.55555	55555	55556
3	0.00000	00000	00000	0.88888	88888	88889
	0.86113	63115	94053	0.34785	48451	37454
4	0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
	0.90617	98459	38664	0.23692	68850	56189
5	0.53846	93101	05683	0.47862	86704	99366
	0.00000	00000	00000	0.56888	88888	88889
	0.93246	95142	03152	0.17132	44923	79170
6	0.66120	93864	66265	0.36076	15730	48139
	0.23861	91860	83197	0.46791	39345	72691
	0.94910	79123	42759	0.12948	49661	68870
7	0.74153	11855	99394	0.27970	53914	89277
	0.40584	51513	77397	0.38183	00505	05119
	0.00000	00000	00000	0.41795	91836	73469

الجدول a2 : قيم الإحداثيات  $\theta$  لنقاط الاستنباط و الأوزان  $H$  لأعداد مختلفة من نقاط غاوس.



أثناء تطوير مصفوفة القساوة للعنصر المذكور نجد أنفسنا أمام تكامل ثنائي على مساحة سطح العنصر من الشكل :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\theta^1, \theta^2) d\theta^1 d\theta^2 \quad (9)$$

بحسب في البدء التكامل بالنسبة لـ  $\theta^1$  باعتبار  $\theta^2$  ثابت و ذلك كما يلي :

$$\int_{-1}^{+1} f(\theta^1, \theta^2) d\theta^1 = \sum_{j=1}^n H_j f(\theta_{(j)}^1, \theta^2) = \psi(\theta^2) \quad (10)$$

و من ثم بحسب التكامل بالنسبة لـ  $\theta^2$  :

$$I = \int_{-1}^{+1} \psi(\theta^2) d\theta^2 = \sum_{m=1}^n H_m \psi(\theta_{(m)}^2) = \sum_{m=1}^n H_m \sum_{j=1}^n H_j f(\theta_{(j)}^1, \theta_{(m)}^2) \\ = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n H_m H_j f(\theta_{(j)}^1, \theta_{(m)}^2) \quad (11)$$

و هكذا نحسب قيمة التكامل (9) ببساطة بحساب قيم التابع  $f(\theta^1, \theta^2)$  في نقاط الاستبطان أو نقاط غاوس الوزنية المعطاة إحدائيا  $\theta^1, \theta^2$  و أوزانها  $H_i$  في الجدول السابق ومن ثم تجمع القيم الناتجة بعد ضربها بالأوزان  $H_i$  على كامل النقاط المختارة . وعند الإنتقال إلى دراسة العناصر للتهية الحجمية نواجه مسألة حساب التكامل الحجمي :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\theta^1, \theta^2, \theta^3) d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (12)$$

بحسب هذا التكامل بشكل مشابه للعلاقة (11) ، و العلاقة التالية تمثل طريقة هذا الحساب :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\theta^1, \theta^2, \theta^3) d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_m H_j H_k f(\theta_{(m)}^1, \theta_{(j)}^2, \theta_{(k)}^3) \quad (13)$$

و نتيجة التكامل هي مجموع جداء قيم التابع  $f(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  في نقاط الاستبطان أو نقاط غلوس الوزنية في أوزان هذه النقاط .

### الملحق الثالث :

في هذا الملحق ستم إيراد نصوص برامج جزئية مكتوبة بلغة الـ C لإنشاء مصفوفة القساوة لعنصر البلاطة المسمى ب (ACM) و المشروح في الفصل السادس الفقرة 6 - 4 و لحل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس Gauss للمصفوفات غير المتناظرة و بطريقة غاوس المترابطة للمصفوفات المتناظرة . يستدعى البرنامج الجزئي الذي ينشئ مصفوفة القساوة لعنصر البلاطة بالشكل :

**Stiff(mat,koor,prop);**

**mat** : حقل ثنائي الأبعاد يتألف من  $12 \times 12$  عنصراً يتم إنشاؤه من خلال البرنامج .  
**koor** : حقل ثنائي يتألف من  $4 \times 3$  عنصراً و يجب أن يحتوي أثناء استدعاء البرنامج **Stiff** على الإحداثيات الديكارتية لعقد العنصر المنتهي مرتبة باتجاه دوران واحد مثلاً  $(i), (j), (k), (\ell)$   
**prop** : حقل أحادي البعد يتألف من ثلاثة عناصر ، عنصريه الأول **prop[o]** يحتوي على معامل المرونة E ، وعنصره الثاني **prop[1]** على معامل بواسون  $\nu$  وعنصره الثالث **prop[2]** سماكة عنصر البلاطة . يستخدم البرنامج التكامل العددي على نقاط غاوس لإنشاء مصفوفة القساوة . و عدد النقاط المستخدمة أربع نقاط تحدد إحداثياتها الطبيعية في البرنامج الجزئي (**header,file**) . **gauss.h**

يجري تطوير مصفوفة القساوة في البدء في الإحداثيات الطبيعية و من ثم تحول إلى الإحداثيات الديكارتية . يستدعى برنامج حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس للمصفوفات غير المتناظرة بالتعليمة :

**gauss(a,n,x,b);**

**a** : مؤشر على مصفوفة الأمثال المختزنة مطراً بعد الآخر . و يبين الشكل التالي تقابل عناصر المصفوفة و المؤشر :

$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
..	..	$a_{ij}$	...
$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	$a_{nn}$

مصفوفة الأمثال

a	a+1	..	a+n-1
a+n	a+n+1	..	a+2n-1
..	..	a+i.n+j	..
a+n(n-1)	...	...	a+n.n-1

مصفوفة المؤشر على مصفوفة الأمثال

n : عدد أسطر مصفوفة الأمثال و هو مساو لعدد أعمقها .

x : مؤشر على مجاهيل جملة المعادلات الخطية .

b : مؤشر على الطرف الثاني لجملة المعادلات .

يستدعى برنامج حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس المترابطة للمصفوفات المتناظرة بالتعليم

التالية:

a : مؤشر على مصفوفة الأمثال المختزن نصفها كما يلي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & .. & : \\ .. & .. & .. & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & .. & a_{2n} \\ : & .. \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأمثال المتناظرة

اختزان نصف مصفوفة الأمثال

و قد اختير هذا الشكل من الاختزان لأنه يلائم طريقة العناصر المنتهية و يمكننا من استبعاد العمليات الصفرية أثناء حل جملة المعادلات الخطية لكامل المنشأ . فمصفوفة القساوة العامة تمتلك كما رأينا الشكل الشريطي و اختزان مصفوفة الأمثال بهذا الشكل يماثل اختزان مصفوفة القساوة العامة في أغلبية برامج طريقة العناصر المنتهية .

az : عدد أسطر مصفوفة الأمثال .

as : عدد أعمدة مصفوفة الأمثال و هو مساو لـ az .

x : مؤشر على مجاهيل جملة المعادلات الخطية .

b : مؤشر على الطرف الثاني لها .

في نصوص البرامج للعطاة الكثير من الشروحات واردة كتعليق للدلالة على العملية المراد إنجازها . كما أن أسماء المتحولات قد اختيرت بحيث تشير إلى القيم التي تمثلها . فمثلاً *etens* تمثل مؤطرة للرونة في الإحداثيات الديكارتية و *enat* تمثل مؤطرة المرونة في الإحداثيات الطبيعية .

جدير بالملاحظة أن البرامج الجزئية التي لم يشر إلى اسم مؤلفها في سياق النص قد كتبت بالتعاون مع الدكتور المهندس *Olden* أثناء عمل المؤلف في المعهد العالي للطرق العددية والمعلوماتية في الهندسة المدنية والتابع لجامعة دارمشتات . وفيما يلي نصوص البرامج المذكورة :

```

/* ===== stz.c ===== */
/* F E M */
/* Abo Diab 24/4/92 */
/* ===== */
/* stiffness matrix Rectangular element */
/* P L A T T E B E N D I N G E L E M E N T (ACM) */
/* void ete() Transforming E- Tensor in nat. coord. */
/* void {} calculating stiffness matrix */
/* ===== */

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "gauss.h"
#include "sunc.h"
#include "fkt.h"
#define DOF 3
#define NODES 4
#define DIM 3
#define PR 3
#define LENHIFEL 20
main()
{
    static double coor[NODES][DIM] = {
        0. , 0. , 0. ,
        2. , 0. , 0. ,
        2. , 2. , 0. ,
        0. , 2. , 0.
    };
    static double props[] = {
        18200000.0000 , .3000 , 0.1
    };
    double mat[NODES*DOF*NODES*DOF];/* stiffness matrix */
/* Initializing the stiffness matrix */
    mv1000(mat,NODES*DOF*NODES*DOF );
    mv2000("element coordinates", coor, NODES, DOF, 8);
    mv2000("element properties", props, 3, 1, 0);
/* Calculating the stiffness matrix */
    zenkie(mat, coor, props);
/* Printing the stiffness matrix */
/* mv2000("the stiffness matrix is:", mat,NODES*DOF ,
    NODES*DOF, 0); */
}
/* ===== F E M ===== */

void zenkie(mat, coor, props)

```

```

double          mat[3 * 4][3 * 4];      /* Stiffness
matrix */
double          coor[4][3]; /* Coordinates */
double props[PR]; /* Material properties */
{
#define two_gauss_points
#include "gauss.h"

double          emo, mue, di; /* Material properties */
double          etens[16], enat[16], omab[4 * 12], rootg,
conbas[3][2],
gab[3], dum[4];

int             iz, is, kdr = 1;
emo = props[0];
mue = props[1];
di = props[2];
etensor(etens, emo, mue, di);
mv1000(mat, 12 * 12);
for (is = 0; is < stu; is++)
    for (iz = 0; iz < stu; iz++) {
        met(1, coor, gat[iz], gat[is], conbas, gab, &rootg);
        etnat(4, etens, conbas, enat);
        zktok(omab, gat[iz], gat[is]);
        mv2230b(enat, omab, mat, 4, 12, rootg * gaw[iz] *
gaw[is]);
    }
    if (kdr)
        mv2000("k in zenkie.c before transformation", mat, 12,
12, 0);
    for (iz = 1; iz <= 4; iz++) {
        met(2, coor, t1(iz), t2(iz), conbas, gab, &rootg);
        if (kdr)
            mv2000("covbas", conbas, 3, 2, 0);
        dum[0] = conbas[1][1];
        dum[1] = -conbas[1][0];
        dum[2] = -conbas[0][1];
        dum[3] = conbas[0][0];
        mv2240(mat, dum, 4, iz, 0);
    }
    if (kdr)
        mv2000("Stiffness matrix in stiff.c after
transformation", mat, 12, 12, 0);
}
void            zktok(omab, x, y)
double          omab[4][12], x, y;

```

```

{
    int            i, j;
    double         x2, xy, y2;

    x2 = x * x;
    xy = x * y;
    y2 = y * y;

    omab[0][0] = 6. * x - 6. * xy;
    omab[0][1] = 0.;
    omab[0][2] = 2. - 6. * x - 2. * y + 6. * xy;
    omab[0][3] = -6. * x + 6. * xy;
    omab[0][4] = 0.;
    omab[0][5] = -2. - 6. * x + 2. * y + 6. * xy;
    omab[0][6] = -6. * x - 6. * xy;
    omab[0][7] = 0.;
    omab[0][8] = -2. - 6. * x - 2. * y - 6. * xy;
    omab[0][9] = 6. * x + 6. * xy;
    omab[0][10] = 0.;
    omab[0][11] = 2. - 6. * x + 2. * y - 6. * xy;

    omab[1][0] = 4. - 3. * x2 - 3. * y2;
    omab[1][1] = 1. + 2. * y - 3. * y2;
    omab[1][2] = -1. - 2. * x + 3. * x2;
    omab[1][3] = -4. + 3. * x2 + 3. * y2;
    omab[1][4] = -1. - 2. * y + 3. * y2;
    omab[1][5] = -1. + 2. * x + 3. * x2;
    omab[1][6] = 4. - 3. * x2 - 3. * y2;
    omab[1][7] = -1. + 2. * y + 3. * y2;
    omab[1][8] = 1. - 2. * x - 3. * x2;
    omab[1][9] = -4. + 3. * x2 + 3. * y2;
    omab[1][10] = 1. - 2. * y - 3. * y2;
    omab[1][11] = 1. + 2. * x - 3. * x2;

    omab[2][0] = 4. - 3. * x2 - 3. * y2;
    omab[2][1] = 1. + 2. * y - 3. * y2;
    omab[2][2] = -1. - 2. * x + 3. * x2;
    omab[2][3] = -4. + 3. * x2 + 3. * y2;
    omab[2][4] = -1. - 2. * y + 3. * y2;
    omab[2][5] = -1. + 2. * x + 3. * x2;
    omab[2][6] = 4. - 3. * x2 - 3. * y2;
    omab[2][7] = -1. + 2. * y + 3. * y2;
    omab[2][8] = 1. - 2. * x - 3. * x2;
    omab[2][9] = -4. + 3. * x2 + 3. * y2;
    omab[2][10] = 1. - 2. * y - 3. * y2;
    omab[2][11] = 1. + 2. * x - 3. * x2;

```

```

omab[3][0] = 6. * y - 6. * xy;
omab[3][1] = -2. + 2. * x + 6. * y - 6. * xy;
omab[3][2] = 0.;
omab[3][3] = 6. * y + 6. * xy;
omab[3][4] = -2. - 2. * x + 6. * y + 6. * xy;
omab[3][5] = 0.;
omab[3][6] = -6. * y - 6. * xy;
omab[3][7] = 2. + 2. * x + 6. * y + 6. * xy;
omab[3][8] = 0.;
omab[3][9] = -6. * y + 6. * xy;
omab[3][10] = 2. - 2. * x + 6. * y - 6. * xy;
omab[3][11] = 0.;
for (i = 0; i < 4; i++)
    for (j = 0; j < 12; j++)
        omab[i][j] = omab[i][j] / 8.;
}

/*A===== */

void          etensor(etens, emo, mue, di)
double        etens[4][4], emo, mue, di;
!

/* Calculating Elasticity tensor */
/* */

/*E===== */

{
    double      f;
    f = emo * di * di * di / 12. / (1. - mue * mue);
    etens[0][0] = etens[3][3] = f;
    etens[0][3] = etens[3][0] = mue * f;
    etens[0][1] = etens[0][2] = etens[3][1] = etens[3][2] = 0.;
    etens[1][0] = etens[1][3] = etens[2][0] = etens[2][3] = 0.;
    etens[1][1] = etens[1][2] =
        etens[2][1] = etens[2][2] = .5 * (1. - mue) * f;
}

/*A===== */

void          met(art, coor, t1, t2, bas, gab, rootg)
int           art;          /* 1 - contravariant Base vectors */
                        /* 2 - covariante Base vectors */
                        /* 3   calculating until rootg */
397

```

```

double coor[4][3];    /* Element cartesian Coordinates */
double t1, t2; /* points natural Coordinates */
double bas[3][2]; /* Base vectors: contra-/covariant */
double gab[3]; /* Derivatives of covariant Base vectors */
double *rootg; /* root of Determinant of covarianten */
/* Metric */
/* Metric, contravariante Base vectors usw. */
/* */

/*E===== */

{
    int i, k, alf, bet, kdr = 0;
    double formab[4][2], covmet[2][2], konmet[2][2],
    conbas[3][2], detg,fak;
    /* derivatives of Form functions for geometry of linear
    quadrangle */
    formab[0][0] = .25 * (t2 - 1.);
    formab[0][1] = .25 * (t1 - 1.);
    formab[1][0] = .25 * (1. - t2);
    formab[1][1] = -.25 * (1. + t1);
    formab[2][0] = .25 * (1. + t2);
    formab[2][1] = .25 * (1. + t1);
    formab[3][0] = -.25 * (1. + t2);
    formab[3][1] = .25 * (1. - t1);
    if (kdr)
        mv2000("Formab", formab, 4, 2, 0);
    /* calculating covariant Base vectors */
    /* bas(i,alf)=coor(i,k)*formab(k,alf) */
    for (alf = 0; alf <= 1; alf++)
        for (i = 0; i <= 2; i++) {
            bas[i][alf] = 0.;
            for (k = 0; k <= 3; k++)
                bas[i][alf] += coor[k][i] * formab[k][alf];
        }
    if (kdr)
        mv2000("bas in str.c", bas, 3, 2, 0);
    if (art != 2) {
        /* calculating covariant metric */
        /* covmet(alf,bet) = bas(i,alf)*bas(i,bet) */
        for (bet = 0; bet <= 1; bet++)
            for (alf = 0; alf <= 1; alf++) {
                covmet[alf][bet] = 0.;
                for (i = 0; i <= 2; i++)
                    covmet[alf][bet] += bas[i][alf] * bas[i][bet];
            }
    }
}

```



```

        if (kdr)
            mv2000("covmet", covmet, 2, 2, 0);
/* root of determinant of covariant metric */
        detg = covmet[0][0] * covmet[1][1] - covmet[1][0] *
covmet[0][1];
        *rootg = sqrt(detg);
        if (art != 3) {
/* derivative of covariant Base vectors */
            for (i = 0; i <= 2; i++)
                gab[i] = .25 * (coor[0][i] - coor[1][i] + coor[2][i]
- coor[3][i]);
/* calculating contravariant metric konmet=1/covmet */
            fak = 1. / detg;
            konmet[0][0] = fak * covmet[1][1];
            konmet[0][1] = -fak * covmet[0][1];
            konmet[1][0] = -fak * covmet[1][0];
            konmet[1][1] = fak * covmet[0][0];
/* Calculating of contravariant Base vectors */
/* bas(i,alf)=bas(i,bet)*konmet(bet,alf) */
            for (alf = 0; alf <= 1; alf++)
                for (i = 0; i <= 2; i++) {
                    conbas[i][alf] = 0.;
                    for (bet = 0; bet <= 1; bet++)
                        conbas[i][alf] += bas[i][bet] * konmet[bet][alf];
                }
            for (alf = 0; alf <= 1; alf++)
                for (i = 0; i <= 2; i++)
                    bas[i][alf] = conbas[i][alf];
        }
    }
}

/*A===== */

void      etnat(art, etens, conbas, enat)
int      art;
/* 2 ~ enat(i,k,gam,del) */
/* 4 ~ enat(alf,bet,gam,del) */
double   etens[2][2][2][2]; /* E - Tensor, kart. Base */
double   conbas[3][2];      /* contravar. Base vectors */
double   enat[2][2][2][2]; /* E - Tensor, nat. Base */

/* Transformation of E- Tensors in nat. Coord. */

/*E===== */

```

```

{
    int            i, k, l, m, alf, bet, gam, del, kdr;
    double         c[2][2][2][2];
    kdr = 0;
    if (kdr)
        mv2000("conbas in etnat", conbas, 3, 2, 0);

    for (i = 0; i < 2; i++)
        for (k = 0; k < 2; k++)
            for (l = 0; l < 2; l++)
                for (del = 0; del < 2; del++) {
                    c[i][k][l][del] = 0.0;
                    for (m = 0; m < 2; m++)
                        c[i][k][l][del] += etens[i][k][l][m] *
conbas[m][del];
                }
    fmr (i = 0; i < 2; i++)
        for (k = 0; k < 2; k++)
            for (gam = 0; gam < 2; gam++)
                for (del = 0; del < 2; del++) {
                    enat[i][k][gam][del] = 0.0;
                    for (l = 0; l < 2; l++)
                        enat[i][k][gam][del] += c[i][k][l][del] *
conbas[l][gam];
                }
    if (art == 4 || art == 3) {
        for (i = 0; i < 2; i++)
            for (bet = 0; bet < 2; bet++)
                for (gam = 0; gam < 2; gam++)
                    for (del = 0; del < 2; del++) {
                        c[i][bet][gam][del] = 0.0;
                        for (k = 0; k < 2; k++)
                            c[i][bet][gam][del] += enat[i][k][gam][del] *
conbas[k][bet];
                    }
        if (art != 3) {
            for (alf = 0; alf < 2; alf++)
                for (bet = 0; bet < 2; bet++)
                    for (gam = 0; gam < 2; gam++)
                        for (del = 0; del < 2; del++) {
                            enat[alf][bet][gam][del] = 0.0;
                            for (i = 0; i < 2; i++)
                                enat[alf][bet][gam][del] += c[i][bet][gam][del]
* conbas[i][alf];
                        }
        }
    }
}

```

```

    }
    if (art == 3)
        for (i = 0; i < 2; i++)
            for (k = 0; k < 2; k++)
                for (l = 0; l < 2; l++)
                    for (m = 0; m < 2; m++)
                        enat[i][k][l][m] = c[i][k][l][m];
    if (kdr) {
        for (i = 0; i < 2; i++)
            for (k = 0; k < 2; k++)
                for (l = 0; l < 2; l++)
                    for (m = 0; m < 2; m++)
                        printf("\n (%d ,%d ,%d ,%d )= %f\n", i, k, l, m,
                            enat[i][k][l][m]);
    }
}
/*A===== */

void mv2230b(a, b, c, abz, bs, f)
double *a, *b, *c; /* erstes Element von A ,B, C */
int abz, bs; /* Dimensionen der Matrizen A, B */
double f; /* Skalierungsfaktor */

/* Matrix C = Matrix C + Matrix B T * Matrix A * Matrix B *
Faktor f */
/* */

/*E===== */

{
double hifel[ LENHIFEL*LENHIFEL];
if ((abz * bs) > (LENHIFEL * LENHIFEL))
    fprintf(stderr, "FEHLER:mv2230b:internes Feld zu klein:
%d < %d\n",
        LENHIFEL * LENHIFEL, abz * bs);
else {
    mv2221(b, a, hifel, abz, bs, abz);
    mv2220b(hifel, b, c, abz, bs, bs, f);
}
}

/*A===== */

void mv2221(a, b, c, abz, as, bs)
double *a, *b, *c; /* first Element der Matrices
A, B, C */

```

```

int          azbz, as, bs; /* Dimension of A, B und C */

/* Matrix C = Matrix A T * Matrix B, nicht ueberschreibend
*/
/* */

/*E===== */

{
    register          lauf = 0, iz, is;
    double            t, *la, *lb;

    for (iz = 0; iz < as; iz++) {
        for (is = 0; is < bs; is++) {
            la = a;
            lb = b;
            t = 0.;
            for (lauf = 0; lauf < azbz; lauf++) {
                t += (*la) * (*lb);
                lb += bs;
                la += as;
            }
            (*c++) = t;
            b++;
        }
        a++;
        b -= bs;
    }
}

/*A===== */

void mv2220b(a, b, c, asbz, az, bs, fak)
double *a, *b, *c; /* first Element of Matrices A, B, C */
int     az, bs, asbz; /* Dimensionen von A, B und C */
double fak;          /* Skalierungsfaktor */

/* Matrix C += Matrix A * Matrix B * Faktor f */
/* */

/*E===== */

{
    register          lauf = 0, iz, is;
    double            t, *la, *lb;

```

```

    for (iz = 0; iz < az; iz++) {
        for (is = 0; is < bs; is++) {
            la = a;
            lb = b;
            t = 0.;
            for (lauf = 0; lauf < asbz; lauf++) {
                t += (*la++) * (*lb);
                lb += bs;
            }
            (*c++) += t * fak;
            b++;
        }
        a += asbz;
        b -= bs;
    }
}

/*A===== */

void          mv1000(a, dim)
double        *a;          /* nullzusetzender Vector */
int           dim;         /* Groesse des Vectors */

/* Nullsetzen */
/* */

/*B===== */

{
    register    lauf = 0;
    while (lauf++ < dim)
        *a++ = 0.;
}

/*A===== */

void          mv2000(text, mat, zei, spa, art)
char          *text;        /* row head with printing */
double        mat[];        /* printed Matrix */
int           zei, spa;     /* Matrix size*/
int           art;          /* output control: */

/* 1 - without row head */
/* 2 - without column numbering */
/* 4 - without row numbering */
/* 8 - without new line after 3 rows */
/* 16 - without page proof after 6 columns */

```

```

/* 32 - without Stop after output */
/* 64 separating elements with commas */

/* control print with e- or. f- Format */
/* */

/*E===== */

{
    int            iz, is, isa = -6, ise, next;
    double         out;
    char           tren[2];
/* unknown Bit placed */
    if ((art > 127) || (art < 0))
        art = 0;
/* row head */
    if (!(art & 1))
        printf("%s: %d row %d column\n", text, zei, spa);
    do {
/* separating in row blocks */
        isa += 6;
        if (((spa - isa) < 7) || (art & 16)) {
            ise = spa;
            next = 0;
        } else {
            ise = isa + 6;
            next = 1;
        }
/* columns numbering */
        if (!(art & 2)) {
            if (!(art & 4))
                printf(" ");
            for (is = isa; is < ise; is++)
                printf(" %3d", is + 1);
            printf("\n");
        }
/* separating symbols */
        tren[0] = ((art & 64) ? ',' : ' ');
        tren[1] = '\0';
/* Table */
        for (iz = 0; iz < zei; iz++) {
/* row numbering */
            if (!(art & 4))
                printf("%3d: ", iz + 1);
            for (is = isa; is < ise; is++) {
                out = mat[iz * spa + is];

```

```

/* Format control */
    if (out >= 100000. || out <= -10000. ||
        (out < .1 && out > -.1))
        printf("%11.4e%s", out, tren);
    else
        printf("%12.5f%s", out, tren);
    }
    printf("\n");
/* new line */
    if (!(art & 8) && ((iz + 1) % 3 == 0) && iz && (zei -
iz - 1))
        printf("\n");
    }
/* Stop after output of one Block */
    if (!(art & 32)) {
        printf("<Enter>\n");
        getchar();
    } else if (next)
        printf("\n");
    } while (next);
}

/*A===== */

void      mv2240(a, t, ba, bt, art)
double    *a;                /* first Element of A */
double    *t;                /* first of 4 main Elements of T */
int        ba;               /* A has the size (ba * 3) * (ba * 3) */
int        bt;               /* only the bt-te 3- Block of T is != E */
int        art;              /* Art of Transformation: */
/* art = 0 : Matrix T T * Matrix A * Matrix T */
/* art = 1 : only T T * A */
/* art = 2 : only A * T */
/* art = 3 : A is Vector (ba * 3) * 1, nur A * T == T T *
A */
/* art = 4 : A ist Vector (ba * 3) * 1, nur A * T T == T
* A */

/*      1   0   0 */
/* T =  0  t0  t1 */
/*      0  t2  t3 */
/* */

/*E===== */

{

```

```

int          iz, is, ib, spa;
double       *lp, r1, r2;

spa = 3 * ba;

if (art == 0 || art == 1) {
/* T T * A */
    lp = a + (bt * 3 - 2) * spa;
    for (ib = 0; ib < 3 * ba; ib++) {
        r1 = *lp;
        r2 = *(lp + spa);
        *lp = r1 * *t + r2 * *(t + 2);
        *(lp + spa) = r1 * *(t + 1) + r2 * *(t + 3);
        lp++;
    }
}
if (art == 0 || art == 2 || art == 3) {
/* A * T or Vector A * T */
    lp = a + bt * 3 - 2;
    for (ib = 0; ib < 3 * ba; ib++) {
        r1 = *lp;
        r2 = *(lp + 1);
        *lp = r1 * *t + r2 * *(t + 2);
        *(lp + 1) = r1 * *(t + 1) + r2 * *(t + 3);
        if (art == 3)
            break;
        lp += spa;
    }
}
if (art == 4) {
/* Vector A * T T */
    lp = a + bt * 3 - 2;
    r1 = *lp;
    r2 = *(lp + 1);
    *lp = r1 * *t + r2 * *(t + 1);
    *(lp + 1) = r1 * *(t + 2) + r2 * *(t + 3);
}
}

/*A===== */

double       t1(lnr)
int          lnr;

/* coordinates of nodes in depending on lfd. Nr. */

```



```

/*E===== */
{
    if (lnr == 1)
        return -1.;
    else if (lnr == 2)
        return 1.;
    else if (lnr == 3)
        return 1.;
    else
        return -1.;
}

/*A===== */

double          t2(lnr)
    int          lnr;

/* coordinates of nodes depending on lfd. Nr. */

/*E===== */
{
    if (lnr == 1)
        return -1.;
    else if (lnr == 2)
        return -1.;
    else if (lnr == 3)
        return 1.;
    else
        return 1.;
}

/* ===== EOF ===== */

/* ===== */
/* Standard library lib : Include-File with all subprograms
/Functions */
/*===== */
/*
*/
/* ===== */

#endif      _libsunc_h

```

```

#define      _libsunc_h

#define mv2212(a,b,c,azbs,as) mv2211(a,b,c,azbs,as)
#define mv2213(a,b,c,asbs,az) mv2210(a,b,c,asbs,az)

extern int      mi2021( /* mat, zei, spa */ );
extern int      mi2300( /* a, len */ );
extern int      mi2310( /* a, ub */ );
extern int      mi2320( /* a, b, ub, rs */ );
extern int      mi2341( /* a, b, c, az */ );
extern int      mi2342( /* a, b, c, az */ );
extern void      mv1000( /* a, dim */ );
extern void      mv1001( /* a, b, dim */ );
extern void      mv1100( /* a, b, c, dim */ );
extern void      mv1101( /* a, b, c, dim */ );
extern void      mv1201( /* a, b, dim, f */ );
extern void      mv1202( /* a, b, c, dim, f */ );
extern void      mv2000( /* text, mat, zei, spa, art
*/ );
extern void      mv2010( /* mat, zei, spa, min, max,
art */ );
extern void      mv2011( /* mat, zei, spa */ );
extern void      mv2030( /* a, b, az, as */ );
extern void      mv2210( /* a, b, c, asbz, az */ );
extern void      mv2210a( /* a, b, c, asbz, az */ );
extern void      mv2210b( /* a, b, c, asbz, az */ );
extern void      mv2211( /* a, b, c, azbz, as */ );
extern void      mv2211a( /* a, b, c, azbz, as */ );
extern void      mv2220( /* a, b, c, asbz, az, bs */
);
extern void      mv2220a( /* a, b, c, asbz, az, bs */
);
extern void      mv2220b( /* a, b, c, asbz, az, bs,
fak */ );
extern void      mv2221( /* a, b, c, azbz, as, bs */
);
extern void      mv2221a( /* a, b, c, azbz, as, bs */
);
extern void      mv2222( /* a, b, c, asbs, az, bz */
);
extern void      mv2222b( /* a, b, c, asbs, az, bz, f
*/ );
extern void      mv2223( /* a, b, c, azbs, as, bz */
);
extern void      mv2230( /* a, b, c, abz, bs */ );

```

```

extern void          mv2230b( /* a, b, c, abz, bs, f */
);
extern void          mv2231( /* a, b, c, abs, bz */ );
extern void          mv2231b( /* a, b, c, abs, bz, f */
);
extern void          mv2232( /* a, b, c, abz, bs */ );
extern void          mv2233( /* a, b, c, abs, bz */ );
extern void          mv2240( /* a, t, ba, bt, art */ );
extern void          mv2240a( /* a, t, ba, bt, art */ );
extern void          mv2315( /* a, b, x, ub, rs */ );
extern void          mv2321( /* a, b, x, n */ );
extern void          mv2322( /* a, b, x, n */ );
extern void          mv2330( /* a, b, x, ub, rs */ );
extern double        mdl200( /* a, b, dim */ );
extern double        md2200( /* a, b, c, az, as */ );
extern double        md2201( /* a, b, dim */ );
extern double        sd0010( /* */ );
extern double        *mp2020( /* zei, spa, art */ );

#endif                                /* !_libsunc_h */
/*=====gauss.h===== */
/* FEM : Include-File Gauss-Integration: coordinates of
Gauss pointss and weights */
/*===== */
/* */
/*===== */

#ifndef _gauss_h
#define _gauss_h
#endif                                /* !_gauss_h */

#ifdef one_gauss_point
static int          stu = 1;
static double       gat[1] = {0.};
static double       gaw[1] = {2.};
#endif
#ifdef two_gauss_points
static int          stu = 2;
static double       gat[2] = {-0.577350269189626,
0.577350269189626};
static double       gaw[2] = {1., 1.};
#endif
#ifdef three_gauss_points
static int          stu = 3;
static double       gat[3] = {0.774596669241483, 0., -
0.774596669241483};

```

```

static double  gaw[3] = {.5555555555555556,
.888888888888889,
.5555555555555556};
#endif
#ifdef four_gauss_points
static int      stu = 4;
static double  gat[4] = {.861136311594053,
.339981043584856,
-.339981043584856, -.861136311594053};
static double  gaw[4] = {.347854845137454,
.652145154862546,
.652145154862546, .347854845137454};
#endif
#ifdef five_gauss_points
static int      stu = 5;
static double  gat[5] = {.906179845938664,
.538469310105683,
0., -.538469310105683, -.906179845938664};
static double  gaw[5] = {.236926885056189,
.478628670499366,
.568888888888889, .478628670499366, .236926885056189};
#endif
#ifdef sechs_gauss_points
static int      stu = 6;
static double  gat[6] = {.932469514203152,
.661209386466265,
.238619186083197, -.238619186083197, -.661209386466265,
-.932469514203152};
static double  gaw[6] = {.171324492379170,
.360761573048139,
.467913934572691, .467913934572691, .360761573048139,
.171324492379170};
#endif
#ifdef seven_gauss_points
static int      stu = 7;
static double  gat[7] = {.949107912342759,
.741531185599394,
.405845151377397, 0., -.405845151377397, -
.741531185599394,
-.949107912342759};
static double  gaw[7] = {.129484966168870,
.279705391489277,
.381830050505119, .417959183673469, .381830050505119,
.279705391489277, .129484966168870};
#endif
#ifdef eight_gauss_points

```

```

static int      stu = 8;
static double   gat[8] = {.960289856497536,
.796666477413627,
.525532409916329, .183434642495650, -.183434642495650,
-.525532409916329, -.796666477413627, -.960289856497536};
static double   gaw[8] = {.101228536290376,
.222381034453374,
.313706645877887, .362683783378362, .362683783378362,
.313706645877887, .222381034453374, .101228536290376};
#endif
#ifdef nine_gauss_points
static int      stu = 9;
static double   gat[9] = {.968160239507626,
.836031107326636,
.613371432700590, .324253423403809, 0., -
.324253423403809,
-.613371432700590, -.836031107326636, -.968160239507626};
static double   gaw[9] = {.081274388361574,
.180648160694857,
.260610696402935, .312347077040003, .330239355001260,
.312347077040003, .260610696402935, .180648160694857,
.081274388361574};
#endif
#ifdef ten_stst
static int      stu = 10;
static double   gat[10] = {.973906528517172,
.865063366688985,
.679409568299024, .433395394129247, .148874338981631,
-.148874338981631, -.433395394129247, -.679409568299024,
-.865063366688985, -.973906528517172};
static double   gaw[10] = {.066671344308688,
.149451349150581,
.219086362515982, .269266719309996, .295524224714753,
.295524224714753, .269266719309996, .219086362515982,
.149451349150581, .066671344308688};
#endif

/* ===== EOF ===== */
/*A===== */
/*
/* mv2321(a,b,x,n) : system of equaion  a * x = b
/* GAUSS Algorithm
/* a : pointer to a-Matrix ,n number of rows or columns
/* b : pointer to b matrix
/* x : pointer to unknowns
/* ===== Abo Diab ,den 20.04.91 ===== */

```

```

void          gauss(a, b, x, n)
double        *a, *b, *x;
int           n;

/*g===== */

{
    int          i, j, k, l, in, ln, kn;
    double        s, t;
    /*-----forward elimination-----*/
    for (i = 0; i < n - 1; i++) {
        /*----- greatest Pivot element -----*/
        s = 0;
        in = i * n;
        for (k = i; k < n; k++) {
            t = fabs(*(a + k * n + i));
            if (t > s) {
                s = t;
                l = k;
                ln = l * n;
            }
        }
        /*----- rows exchange-----*/
        for (j = 0; j < n; j++) {
            s = *(a + in + j);
            *(a + in + j) = *(a + ln + j);
            *(a + ln + j) = s;
        }
        s = *(b + i);
        *(b + i) = *(b + l);
        *(b + l) = s;
        /*----- a singular -----*/
        if (fabs(*(a + in + i) / *(a + ln + l)) < 0.000000001)
            printf("\n coefficient matrix a is singular");
        /*----- Elimination stage k -----*/
        for (k = i + 1; k < n; k++) {
            kn = k * n;
            s = *(a + kn + i) / *(a + ln + l);
            *(a + kn + i) = 0;
            for (j = i + 1; j < n; j++) {
                *(a + kn + j) -= s * *(a + ln + j);
            }
            *(b + k) -= s * *(b + l);
        }
    }
    /*----- backward elimination -----*/

```

```

*(x + n - 1) = (*(b + n - 1)) / (*(a + n * n - 1));
for (i = (n - 2); i >= 0; i--) {
    in = i * n + i;
    *(x + i) = *(b + i);
    for (k = 1; k < n - i; k++) {
        *(x + i) -= (*(a + in + k)) * (*(x + i + k));
    }
    *(x + i) = (*(x + i)) / (*(a + in));
}
}

/*A=====vk_gauss.c===== */
/*
/* mv2322(a,b,x,n) : system of equations  a * x = b      */
/* interlinked GAUSS Algorithmu                      */
/* a : pointer to a-Matrix , n number of rows or columns */
/* b : pointer to right side b                        */
/* x : pointer to the vector of Unknowns x            */
/* matrix a is symmetric and Over diagonal elements   */
/* are arranged as one row .                          */
/*                                                     */
/* ===== Abo Diab ,den 09.04.91 ===== */
void vk_gauss(a, b, x, n)
double *a, *b, *x;
int n;

/*E===== */

{
    int i, j, k, zde, zd, zdi, zdk, zdj, zdjr;
    zd = n;
/*----- forward elimination -----*/

    for (i = 1; i < n; i++) {

        for (k = 0; k < (n - i); k++) {
            zdj = 0;
            zdi = i;
            zdk = i + k;
            for (j = 0; j < i; j++) {

                *(a + zd + k) -= ((*a + zdi)) * (*(a + zdk)) / (*(a
+ zdj));

                zdj += n - j;

```

```

        zdi += n - j - 1;
        zdk += n - j - 1;
    }
}
zdxr = 0;
zdi = i;
for (j = 0; j < i; j++) {

    *(b + i) -= ((*a + zdi) * *(b + j)) / *(a +
zdxr));

    zdxr += n - j;
    zdi += n - j - 1;
}
zd += (n - i);

}

/*----- backward elimination -----*/
zde = n * (n - 1) / 2 + n - 1;
*(x + n - 1) = *(b + n - 1) / *(a + zde));
zd = 1;
for (i = (n - 2); i >= 0; i--) {
    zdi++;
    zde -= zd;
    zdi = n - zdi;
    *(x + zdi) = *(b + zdi);
    for (k = 1; k < (n - i); k++) {
        *(x + zdi) -= *(a + zde + k) * *(x + zdi + k);
    }
    *(x + zdi) = *(x + zdi) / *(a + zde));
}
}
}

```

وفيما يلي حسابات مصفوفة القسوة لعنصر بلاطة مستطيل إحداثيات رؤوسه الأربعة معطاة بالشكل التالي:

$x^1(1) = 0.0$	$x^2(1) = 0.0$	$x^3(1) = 0$
$x^1(2) = 2.0$	$x^2(2) = 0.0$	$x^3(2) = 0$
$x^1(3) = 2.0$	$x^2(3) = 2.0$	$x^3(3) = 0$
$x^1(4) = 0.0$	$x^2(4) = 2.0$	$x^3(4) = 0$



Covariant basis vectors: 3 rows 2 columns

	1	2
1:	1.000	0.000e+000
2:	0.000e+000	1.000

Stiffness matrix in stiff.c after transformation: 12 rows 12 columns

	1	2	3	4	5	6
1:	4166.667	1916.667	-1916.667	-1666.667	583.333	-1666.667
2:	1916.667	2416.667	-500.000	583.333	916.667	-1.563e-013
3:	-1916.667	-500.000	2416.667	1666.667	1.847e-013	916.667
4:	-1666.667	583.333	1666.667	4166.667	1916.667	1916.667
5:	583.333	916.667	1.563e-013	1916.667	2416.667	500.000
6:	-1666.667	-1.847e-013	916.667	1916.667	500.000	2416.667
7:	-833.333	-833.333	833.333	-1666.667	-1666.667	583.333
8:	833.333	750.000	-1.421e-014	1666.667	916.667	1.563e-013
9:	-833.333	0.000e+000	750.000	583.333	-1.563e-013	916.667
10:	-1666.667	-1666.667	-583.333	-833.333	-833.333	-833.333
11:	1666.667	916.667	-1.563e-013	833.333	750.000	1.421e-014
12:	-583.333	1.563e-013	916.667	833.333	0.000e+000	750.000

<Enter>

	7	8	9	10	11	12
1:	-833.333	833.333	-833.333	-1666.667	1666.667	-583.333
2:	-833.333	750.000	-1.421e-014	-1666.667	916.667	1.421e-013
3:	833.333	0.000e+000	750.000	-583.333	-1.492e-013	916.667
4:	-1666.667	1666.667	583.333	-833.333	833.333	833.333
5:	-1666.667	916.667	-1.421e-013	-833.333	750.000	1.421e-014
6:	583.333	1.563e-013	916.667	-833.333	0.000e+000	750.000
7:	4166.667	-1916.667	1916.667	-1666.667	-583.333	1666.667
8:	-1916.667	2416.667	-500.000	-583.333	916.667	-1.563e-013
9:	1916.667	-500.000	2416.667	-1666.667	1.847e-013	916.667
10:	-1666.667	-583.333	-1666.667	4166.667	-1916.667	-1916.667
11:	-583.333	916.667	1.563e-013	-1916.667	2416.667	500.000
12:	1666.667	-1.847e-013	916.667	-1916.667	500.000	2416.667

<Enter>

في ختام هذا الكتاب سوف تعرض جملة من الملاحظات حول الأسلوب المقترح لاستنباط توابع تقريبية متعلقة بالمؤثرات الخارجية بالإضافة إلى تعلقها بدرجات الحرية ضمن العنصر المنتهي والتي عرضت أثناء معالجة مشاكل المنشآت الخطوطية والبلاطات في الفصلين الخامس والسادس من هذا الكتاب. وسيعاد عرضها بشكلها العام وهي وإن عرضت الآن لتناسب قالب نظرية المرونة في ميكانيك الإنشاءات إلا أنها قابلة للاستخدام في مجالات العلوم الأخرى التي تستخدم فيها طريقة العناصر المنتهية لحل محل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة والتي تملك شروطاً طرفية لازمة وأخرى طبيعية. وسوف يشار إلى إمكانية استخدام التوابع التقريبية المشتقة وفق الأسلوب المقترح في طرق العناصر المنتهية المختلفة. ويناقش الشكل المتغير في المناسب لاستخدام هذه التوابع والناجمة من خصوصيتها في تحقيقها بحمل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة الحاكمة للمسألة المطروحة والشروط الطرفية اللازمة. كما سيناقش ترابط طرق العناصر المنتهية والتي تعتمد صيغ متغيرة مختلفة عند استخدام مثل هذه التوابع كتوابع تقريبية. وهنا أنه يجب النظر إلى هذه الملاحظات كمسودة عمل أولية تحسن الاستفادة منها بشكل أفضل بتطوير طرق استنباط تؤدي الغرض المطلوب في الحصول على توابع تقريبية تحقق المعادلات التفاضلية غير المتجانسة الحاكمة للمسألة المطروحة والشروط الطرفية اللازمة. وفي هذا السياق ستعرض فكرة لاستخدام مرهنة غاوس في تحويل التكامل الحتمي إلى تكامل سطحي في تعيين الثوابت العشوائية للتوابع التقريبية بدلاً من عملية الاستنباط الهندسي التقليدية.

لفرض أن المعادلات التفاضلية غير المتجانسة التي تحكم المسألة المطروحة هي:

$$\Delta^{ij} u_i = \bar{p}^j \quad (8.1)$$

$\Delta$  مصفوفة من المعاملات التفاضلية،  $u_i$  التوابع المجهولة،  $\bar{p}^j$  توابع المؤثرات الخارجية. وأن الشروط الطرفية هي التالية:  
الشروط الطرفية اللازمة:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } s_u \quad (8.2)$$

والشروط الطرفية الطبيعية:

$$\sigma^{ij} n_j = \bar{T}^i \text{ on } s_\sigma \quad (8.3)$$

$s_u$  جزء سطح الوسط الذي عليه التوابع  $u_i$  معلومة،  $s_\sigma$  جزء سطح الوسط الذي عليه بعد تقسيم الوسط إلى عناصر منتهية، بالإضافة إلى متطلبات الاستمرارية، والاستقلالية الخطية للتوابع المفترضة  $u_i$  ومتطلبات كونها كاملة أيضا تتطلب الشروط الطرفية اللازمة للعنصر المنتهي أن يكون:

$$[u_i]_{x_i=x_i(e)} = u_i(e) \quad (8.4)$$

حيث  $x_i(e)$  هي إحداثيات عقد العنصر المنتهي و  $u_i(e)$  درجات حرية عقده.

في البدء نختار التوابع التقريبية بالشكل للعالمي:

$$u_i = x_i^n c_n \quad (8.5)$$

حيث تتعلق المصفوفة  $x_i^n$  بالإحداثيات المحلية  $x_i (i = 1, 2, 3)$  ، عدد من المعاملات العشوائية أكثر من العدد المعتاد بحيث يسمح باحتواء المؤثر الخارجي. بتعويض التوابع التقريبية (8.5) في المعادلات التفاضلية (8.1) نحصل على علاقة تربط بين التوابع التقريبية هذه وبين المؤثر الخارجي:

$$(\Delta^{ij} x_i^n) c_n = \bar{p}^j \quad (8.6)$$

بمقارنة معاملات طرفي المعادلة (8.6) مع بعضها البعض يمكن التعبير عن بعض الثوابت  $c_n$  بدلالة المؤثرات الخارجية على العنصر  $\bar{p}^j$ .

لا اعتبار مؤثرات خارجية لاعلى التعيين ضمن العنصر المنتهي يمكننا استخدام التوابيع التقريبية للتعبير عن المؤثرات الخارجية ضمن العنصر بدلالة شداقما على عقد العنصر:

$$(\Delta^j x_i^n) c_n = \bar{p}^j = NP_i^j \bar{p}_0^r \quad (8.7)$$

$NP_i^j$  مصفوفة توابيع الشكل للمؤثرات الخارجية،  $\bar{p}_0^r$  هي قيم توابيع المؤثرات الخارجية على عقد العنصر. محل مناسب للمعادلة (8.6) و (8.7) يمكن أن ينفصل التابع التقريبي (8.5) إلى جزء متجانس بعدد من الثوابت  $c_k$  مساو لعدد درجات الحرية لعقد العنصر وآخر غير متجانس متعلق بالمؤثرات الخارجية:

$$u_i = M_i^k c_k + \bar{M}_{ij} \bar{p}^j \quad (8.8)$$

يمكن الآن تحديد الثوابت الاختيارية  $c_k$  بتعويض إحداثيات عقد العنصر في المعادلة (8.8) وعكس العلاقة الناتجة:

$$u_i(e) = A_i(e)^k c_k + \bar{A}_i(e) z \bar{p}^j \quad (8.9)$$

$$c_k = B_k^{m(e)}(u_{m(e)} - \bar{A}_m(e) z \bar{p}^j)$$

حيث  $A_i(e)^k$  ،  $\bar{A}_i(e) z$  مصفوفتان تتجانسان عن تعويض إحداثيات عقد العنصر في المصفوفتين  $\bar{M}_{ij}$  ،  $M_i^k$  على التوالي.  $B_k^{m(e)}$  المصفوفة المعاكسة للمصفوفة  $A_i(e)^k$  ، و  $m$  قرينة تتحول مثل  $i$  بتعويض الثوابت الاختيارية بقيمها من العلاقة (8.9) في العلاقة (8.8) نحصل على علاقة تقريبية تربط بين التوابيع الانتقالات  $u_{m(e)}$  ودرجات الحرية لعقد العنصر  $u_{m(e)}$  بالإضافة إلى حمولات العنصر  $\bar{p}^j$

$$u_i = M_i^k B_k^{m(e)}(u_{m(e)} - \bar{A}_m(e) z \bar{p}^j) + \bar{M}_{ij} \bar{p}^j \quad (8.10)$$

$$u_i = N_i^{m(e)} u_{m(e)} + \bar{N}_{ij} \bar{p}^j$$

$$N_i^{m(e)} = M_i^k B_k^{m(e)} \quad (8.11)$$

$$\bar{N}_{ij} = -M_i^k B_k^{m(e)} \bar{A}_{m(e)j} + \bar{M}_{ij} = -N_i^{m(e)} \bar{A}_{m(e)j} + \bar{M}_{ij}$$

$N_i^{m(e)}$  هي توابع الشكل وتمثل الجزء المتحانس للتابع التقريبي،  $\bar{N}_{ij}$  هي الجزء الغير متحانس للتابع التقريبي ويتبين من المعادلة (8.11) أنه مرتبط بالجزء المتحانس آنف الذكر.

من الجدير بالذكر أيضا أن التابع التقريبي (8.10) المشتق بهذه الطريقة يمكن استخدامه في تطبيق طريقة العناصر المنتهية — نموذج Trefftz. بالإضافة إلى ذلك يمكن أن نشق منه باستخدام علاقات الإجهادات — الانتقالات توابع تقريبية للإجهادات صالحة للاستخدام في التطبيق المحين لطريقة العناصر المنتهية — نموذج الإجهادات، وذلك لأن التابع (8.10) المحقق للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المعتبرة يحقق بشكل آلي معادلات التوازن غير المتجانسة لهذه المسألة.

في كثير من الأحيان قد لا يجدي طريقة الاستنباط الهندسية الموصوفة في المعادلات (8.11)، (8.10)، (8.9) في إيجاد علاقة تطابقية محققة للشروط الطرفية اللازمة وينتج عنها بدلا من ذلك توابع انتقالات تصف بعدم الاستقرار كما هو الحال مثلا عند استنباط التوابع التقريبية لعنصر بلاطة مستطيل بثلاث درجات حرية على كل عقدة. عندها يمكن الاستغناء عن طريقة الاستنباط الهندسية هذه وتستبدل بطريقة أخرى لتعين الثوابت الاختيارية  $c_k$  حيث تستخدم التوابع التقريبية بشكلها الوارد في العلاقة (8.8) في التطبيق وتنتفي الحاجة إلى إيجاد علاقة شبيهة بالعلاقة (8.10).

### 8-3 — الصياغة المتغيرة:

لنعتبر مسألة المرونة الخطية المحكومة بالمعادلات الأساسية التالية:

معادلات التوازن

$$\sigma_{,j}^i + \bar{f}^i = 0 \quad \text{in } V \quad (8.12)$$

## علاقات التشوهات — الانتقالات

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V \quad (8.13)$$

قانون السلوك:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (8.14)$$

والشروط الطرفية

الشروط الطرفية الهندسية:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } s_u \leq s \quad (8.15)$$

الشروط الطرفية الميكانيكية

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}^i \quad \text{on } s_\sigma = s/s_u \quad (8.16)$$

حيث  $\bar{u}_i$  توابع انتقالات معلومة على جزء السطح  $s_u$ ،  $\bar{T}^i$  توابع قوى معلومة على جزء

السطح  $s_\sigma$ ،  $n_j$  مركبات شعاع النظم الخارج من السطح.

يتم الحصول على المعادلة التفاضلية مصاعغة باستخدام الانتقالات والمثلة بالمعادلة (8.1) بإيجاد علاقات الإجهادات — الانتقالات وذلك بتعويض علاقات التشوهات — الانتقالات (8.13) في قانون السلوك (8.14) ومن ثم تعويض الناتج في معادلات التوازن (8.12). وباعتبار ان التوابع التقريبية (المعادلة (8.10)) والمختارة بحيث تحقق المعادلة التفاضلية (8.1) وبالتالي فهي تحقق بشكل آلي المعادلات (8.12)، (8.13)، (8.14) وتحقق أيضا الشروط الطرفية الهندسية (8.15) لذا فان التعبير المتغيراتي يجب أن يقود إلى تحقيق الشروط الطرفية الميكانيكية (8.16) بشكل تقريبي. ولهذا فان التعبير المتغيراتي يجب ان يتركب من الشكل التكاملي للشروط الطرفية الميكانيكية:

$$\delta I = \int_{s_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}^i) \delta u_i \, ds = 0 \quad (8.17)$$

وباعتبار أن التركيب السابق هو تعبير عام بسيط للشروط الطرفية الميكانيكية، فمن الممكن استخدامه لتطبيقات في مسائل لا تملك بالضرورة مبدأ متغيراتها. كما أنه من الممكن تحويله إلى

أشكال أخرى. فتكامل الحد على السطح الذي عليه القوى معلومة يمكن استبداله بالفارق بين تكاملين أحدهما على كامل السطح والآخر على السطح الذي عليه الانتقالات معلومة بالشكل:

$$\int_{s_{\sigma}} \sigma_{ij}^j n_j \delta u_i ds = \int_s \sigma_{ij}^j n_j \delta u_i ds - \int_{s_a} \sigma_{ij}^j n_j \delta u_i ds = 0 \quad (8.18)$$

لنحصل على:

$$\delta I = \int_s \sigma_{ij}^j n_j \delta u_i ds - \int_{s_a} \sigma_{ij}^j n_j \delta u_i ds - \int_{s_{\sigma}} \bar{T}^i \delta u_i ds = 0 \quad (8.19)$$

وبعد تعويض الشروط الطرفية الهندسية في المعادلة الأخيرة نحصل على العلاقة المتغيرية التالية:

$$\delta I = \int_s \sigma_{ij}^j n_j \delta u_i ds - \int_{s_{\sigma}} \bar{T}^i \delta u_i ds = 0 \quad (8.20)$$

هذه العلاقة تشكل أساسا متغيريا صالحا لاستخدام هذه الطريقة كطريقة طرفية يتم فيها حساب مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي بتكاملات على اطراف العنصر فقط. وينصح باستخدام هذه المعادلة كأساس حسابي متغيري في حال لم تتمكن بطريقة الاستنباط الهندسية الموصوفة في المعادلات (8.11), (8.10), (8.9) من إيجاد تابع تقريبي بشكل للمعادلة (8.10) يتصف بصفة الاستمرارية والتطابق. وتستخدم هذه الطريقة أيضا في حال وجود ثقب وفتحات ضمن الوسط المدروس.

أما ما عدا ذلك وعند تمكنا من إيجاد التابع التقريبي المتطابق والمتوافق والمستمر فيمكن ان تطبق هذه الطريقة بخوارزميات شبيهة بطريقة العناصر المنتهية التقليدية من نموذج الانتقالات والنموذج المجهن للإجهادات. والطرق الأخيرة يجب أن تقود إلى نفس نتائج الطريقة الطرفية المثلة بالمعادلة (8.20). وللرهان على ذلك سوف نغير شكل للمعادلة (8.19) بأسلوبين. الأسلوب الأول بشكل مباشر باستخدام مقولة غاوس في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي:

$$\int_V (\sigma_{ij}^j \delta u_i)_{,j} dV = \int_s \sigma_{ij}^j n_j \delta u_i ds = \int_V \sigma_{ij}^j \delta u_{i,j} ds + \int_V \sigma_{ij}^j \delta u_{i,j} dV \quad (8.21)$$

ومعادلات التوازن:

$$\sigma_{ij}^j \delta u_{i,j} = -\bar{f}^i \quad (8.22)$$

فناخذ العلاقة (8.19) الشكل:

$$\delta I = \int_V \sigma^{ij} \delta u_{i,j} dV - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \delta u_i ds - \int_{s_\sigma} \bar{T}^i \delta u_i ds = 0 \quad (8.23)$$

والتي تصبح بعد تعويض الشروط الطرفية الهندسية التالية:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad s_u; \quad \delta u_i = \delta \bar{u}_i = 0 \quad (8.24)$$

وعلاقات التشوهات-الانتقالات كما يلي:

$$\delta I = \int_V \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V \bar{f}^i \delta u_i dV - \int_{s_\sigma} \bar{T}^i \delta u_i ds = 0 \quad (8.25)$$

هذه العلاقة تشبه تماماً مبدأ الانتقالات الوهمية. لكنها تختلف عنه في الشروط التي يجب أن يحققها تابع الانتقالات. هنا يجب أن يحقق تابع الانتقالات المعادلة التفاضلية ضمن الوسط والشروط الطرفية الهندسية وعليه يجب أن تحقق توابع الإجهادات الواردة في العلاقة (8.24) والمشتقة من توابع الانتقالات هذه معادلات التوازن ضمن الوسط.

والأسلوب الثاني لتغيير شكل المعادلة (8.19) يكمن باستخدام التحويل:

$$\int_s \sigma^{ij} n_j \delta u_i ds = \delta \int_s f(\sigma^{ij} n_j) u_i ds - \int_s [\delta(\sigma^{ij} n_j)] u_i ds \quad (8.26)$$

ومن ثم نستخدم مقولة غاوس في تحويل توابع الإجهادات المكاملة على الحجم إلى تكامل سطحي:

$$\int_s [\delta(\sigma^{ij} n_j)] u_i ds = \int_V u_i \delta \sigma^{ij,j} dV + \int_V u_{i,j} \delta \sigma^{ij} dV \quad (8.27)$$

ومتغير العلاقة (8.12):

$$\delta \sigma^{ij,j} = \delta \bar{f}^i = 0 \quad (8.28)$$

لنحصل بعد عدد من العمليات الجبرية والاختصارات على العلاقة التالية:

$$\delta I = - \int_V u_{i,j} \delta \sigma^{ij} dV + \delta \int_s u_i (\sigma^{ij} n_j) ds + \int_{s_\sigma} \bar{T}^i \delta u_i ds - \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \delta u_i ds = 0 \quad (8.29)$$



والتي تصبح بعد تعويض الشروط الطرفية الهندسية (15) بالشكل:

$$\delta I = - \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma^{ij} dV + \int_{s_u} \bar{u}_i \delta \sigma^{ij} n_j ds + \int_{s_\sigma} \delta \left[ (\sigma^{ij} n_j - \bar{T}^i) u_i \right] ds = 0 \quad (8.30)$$

وهذه العلاقة تشبه مبدأ القوى الوهمية المعدل. وبالطبع تختلف شروط استخدامها عن شروط استخدام المبدأ السابق فهنا يجب البدء بتابع انتقالات يحقق معادلة أويلر التفاضلية ضمن الوسط والشروط الطرفية الهندسية وتوابع الإجهادات الواردة في العلاقة (8.30) هي توابع مشتقة من تابع الانتقالات هذا كما أن  $u_i$  على  $s_\sigma$  لا يمكن اختيارها بشكل مستقل.

وباعتبار أن العلاقة (8.25) تشبه مبدأ الانتقالات الوهمية والذي يمثل الأساس النظري لطريقة الانتقالات وأن العلاقة (8.30) تشبه مبدأ القوى الوهمية المعدل والذي يمثل الأساس النظري لطريقة القوى المحجبة وأن للعلاقين (8.25) و (8.30) أصل مشترك واحد وهو العلاقة (8.20) فيمكن الاستنتاج أنه باختيار توابع انتقالات محققة لمعادلة أويلر التفاضلية والشروط الطرفية الهندسية فلا فرق بين استخدام أي من العلاقتين (8.25) أو (8.30) أو (8.20) كأساس نظري للحل.

وفي مسائل المرونة الخطية حيث يوجد تابع كمون لتعبير العمل الوهمي للقوى الداخلية وللقوى الخارجية نحصل من العلاقة (8.25) على:

$$\delta I = \delta \left\{ 1/2 \int_V \varepsilon_{ij} c^{ijkl} \varepsilon_{kl} dV - \int_V \bar{f}^i u_i dV - \int_{s_\sigma} \bar{T}^i u_i ds \right\} = 0 \quad (8.31)$$

وهي مشابهة لمبدأ الطاقة الكامنة الاصفري. كما نحصل من العلاقة (8.29) على:

$$\delta I = \delta \left\{ -1/2 \int_V (\sigma^{ij} c^{ijkl})^{-1} \sigma^{kl} dV + \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \bar{u}_i ds + \int_{s_\sigma} (\sigma^{ij} n_j - \bar{T}^i) u_i ds \right\} = 0 \quad (8.32)$$

وهي مشابهة لمبدأ الطاقة المتممة للمعدل.

وعلى هذا الاساس فإن النتائج التي نحصل عليها باستخدام التوابع التقريبية المشتقة كما ورد في الفقرة 2 وفق الاساس المتغيراني (8.31) أو وفق الاساس المتغيراني (8.32) واحدة لكلا الحالتين وهي بدورها مماثلة لتلك النتائج التي تعطيها المعادلة (8.20) شرط أن تراعى كافة الشروط المتغيرانية للعلاقات المذكورة.

#### 8-4- التطبيق العام للطريقة

سيعرض في هذه الفقرة التطبيق العام للطريقة باعتبارها طريقة طرفية يتم فيها تعيين الثوابت المشوالية  $c_k$  الواردة في التابع التقريبي (8.8) دون اللجوء إلى عملية الاستنباط الهندسي المشروحة في المعادلات (8.9)، (8.10)، (8.11) حيث لا نحتاج في هذا التطبيق إلى العلاقة المباشرة التي تربط بين تابع الانتقالات ضمن العنصر وانتقالات العقد وهذا يؤدي بدوره إلى تجنب الصعوبة في تحقيق الاستمرارية  $c^1$  والناجمة عن عملية الاستنباط الهندسي ويمكن من تطوير عناصر منتهية تتصف بالعمومية.

لنطلق الآن من التوابع التقريبية (8.8) ونحقق لمعادلة لاغرانج

$$u_i = M_i^k c_k + \bar{M}_{im} \bar{p}^m \text{ in } V \quad (8.33)$$

على السطح  $s$  يكون تابع الانتقالات المترابط مع مثيله السابق في  $V$  بالشكل:

$$u_i = B_i^k c_k + \bar{B}_{im} \bar{p}^m \text{ on } s \quad (8.34)$$

ولنفترض أن لهذا التابع الجزء

$$u_i = A_i^k c_k + \bar{A}_{im} \bar{p}^m \text{ on } s_\sigma \quad (8.35)$$

على جزء السطح  $s_\sigma$ .

يرافق مع تابع الانتقالات المفترض هذا تابع إجهادات مفترض ضمن الوسط يشتق من سابقه باستخدام علاقات التشوهات-الانتقالات وقانون السلوك

$$\sigma^{ij} = p^{ijk} c_k + \bar{p}^m \bar{p}^m \text{ in } V \quad (8.36)$$

ولنشتق منها التوابع  $n_j^{\sigma ij}$  على السطح  $s$

$$\sigma_{ij}^{lj} n_j = R^{ik} c_k + \bar{R}^i_m p^m \text{ on } s \quad (8.37)$$

نفترض أن لهذا التابع الجزأين :

$$\sigma_{ij}^{lj} n_j = R u^{ik} c_k + \bar{R} u^i_m p^m \text{ on } s_u \quad (8.38)$$

$$\sigma_{ij}^{lj} n_j = R \sigma^{ik} c_k + \bar{R} \sigma^i_m p^m \text{ on } s_\sigma \quad (8.39)$$

على السطحين  $s_u$  و  $s_\sigma$  على التوالي.

باعتبار أن توابع الإجهادات الواردة في العلاقة (8.36) تحقق معادلات التوازن فالعلاقة (8.27)

سوف تختصر إلى:

$$\int_V u_{i,j} \delta \sigma^{lj} dV = \int_s (\delta \sigma^{lj} n_j) u_i ds = \int_{s_\sigma} (\delta \sigma^{lj} n_j) u_i ds + \int_{s_u} (\delta \sigma^{lj} n_j) u_i ds \quad (8.40)$$

وبعد تعريض الشروط الطرفية الهندسية فيها تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$\int_V u_{i,j} \delta \sigma^{lj} dV = \int_s (\delta \sigma^{lj} n_j) u_i ds = \int_{s_\sigma} (\delta \sigma^{lj} n_j) u_i ds + \int_{s_u} (\delta \sigma^{lj} n_j) \bar{u}_i ds \quad (8.41)$$

سوف نستخدم العلاقة السابقة بأحد الشكلين التاليين :

$$\int_V u_{i,j} \delta \sigma^{lj} dV = \int_{s_\sigma} (\delta \sigma^{lj} n_j) u_i ds + \int_{s_u} (\delta \sigma^{lj} n_j) \bar{u}_i ds \quad (8.42)$$

$$\int_s (\delta \sigma^{lj} n_j) u_i ds = \int_{s_\sigma} (\delta \sigma^{lj} n_j) u_i ds + \int_{s_u} (\delta \sigma^{lj} n_j) \bar{u}_i ds \quad (8.43)$$

لتعيين الثوابت العشوائية  $c_k$  على مستوى العنصر , والنتيجة واحدة في كلا الحالتين.

يتميز استخدام العلاقة (8.43) عن استخدام العلاقة (8.42) في تعيين الثوابت العشوائية بإمكانية تطبيق الطريقة دون اللجوء إلى تكاملات ضمن العنصر المنتهي, وإنهاء تطبيق الطريقة بنجاح بتقييم تكاملات على أطراف العناصر المنتهية. مما يمكننا من معالجة عناصر منتهية تتصف بالعمومية ويمكن أن تكون ذات فتحات داخلية أو شقوق شرط أن نستخدم للأخيرة توابع تقريبية تحقق الشروط الطرفية للفتحات أو الشقوق هذه.

لنفرض الآن أن  $\bar{u}_i$  تابع يحقق شروط الاستمرارية ومتطابق مع  $u_i$  على  $S_u$  وأن هذه الاستمرارية وهذا التطابق يتطلب أن يكون:

$$\bar{u}_i = L_i^k q_k \quad (8.44)$$

حيث  $L_i^k$  مصفوفة تابعة للإحداثيات المستقلة، و  $q_k$  إحداثيات معممة كانتقالات العقد والتي نرغب بأن تكون المجاهيل النهائية في جملة المعادلات النهائية للحملة المدروسة. بتعويض العلاقات من (8.33) وحتى (8.39) والعلاقة (8.44) في العلاقة (8.42) أو (8.43) نحصل على جملة معادلات في مستوى العنصر لتحديد الثوابت العشوائية. فمثلا بعد التعويض في العلاقة (8.43) نحصل على:

$$\begin{aligned} \delta c_i \left( \int_S R^{il} N_i^k ds \right) c_k + \delta c_i \left( \int_S R^{il} \bar{N}_{im} ds \right) \bar{p}^m = \delta c_i \left( \int_{S_\sigma} R^{il} A_i^k ds \right) c_k \\ + \delta c_i \left( \int_{S_\sigma} R^{il} \bar{A}_{im} ds \right) \bar{p}^m + \delta c_i \left( \int_{S_u} R^{il} L_i^k ds \right) q_k \end{aligned} \quad (8.45)$$

أو بالشكل المختصر:

$$\delta c_i H^{ik} c_k + \delta c_i \bar{H}_{im}^1 \bar{p}^m = \delta c_i T^{ik} q_k \quad (8.46)$$

حيث:

$$H^{ik} = \left( \int_S R^{il} N_i^k ds \right) - \left( \int_{S_\sigma} R^{il} A_i^k ds \right) \quad (8.47)$$

$$\bar{H}_{im}^1 = \left( \int_S R^{il} \bar{N}_{im} ds \right) - \left( \int_{S_\sigma} R^{il} \bar{A}_{im} ds \right) \quad (8.48)$$

$$T^{ik} = \left( \int_{S_u} R^{il} L_i^k ds \right) \quad (8.49)$$

وباعتبار أنه يمكن أن تكون قيم  $\delta c_i$  عشوائية ينتج من العلاقة (8.45) أن:

$$H^{ik} c_k = -\bar{H}_{im}^1 \bar{p}^m + T^{ik} q_k \quad (8.50)$$

وبعكس هذه العلاقة نحصل على قيم الثوابت العشوائية بدلالة حمولات العنصر وانتقالات العقد

$$c_p = -(H^{ip})^{-1} \bar{H}_{im}^1 \bar{p}^m + (H^{ip})^{-1} T^{ik} q_k \quad (8.51)$$

في العناصر المنتهية الواقعة على الأطراف الحقيقية للوسط المدروس قد لا تكفي المعادلات (8.42) أو (8.43) لتحديد الثوابت العشوائية عندها يجب الاستعانة بالعلاقة التالية:

$$\int_{\sigma_u} \sigma_{ij} n_j \delta \bar{u}_i = 0 \quad (8.52)$$

وهذا يؤدي بدوره إلى اعتبار تأثير شروط الاستناد الطرفية للعنصر المنتهي على قساوته.

يمكن الحصول على نفس النتائج السابقة بتعويض العلاقات من (8.33) وحتى (8.39) في العلاقة (8.42) ويمكن التأكد ببساطة من هذه المقولة بملاحظة مقولة غاوس في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي الواردة في العلاقة (8.41).

يتم الحصول على جملة المعادلات النهائية لانتقالات العقد بتقييم التكاملات الواردة في العلاقة (8.20).

$$\delta I = \delta q_n \int_{\sigma} L_i^n (R^{ip} c_p + \bar{R}^i_m \bar{p}^m) ds - \delta q_n \int_{\sigma} L_i^n \bar{T}^i ds \quad (8.53)$$

$$= \delta q_n T^{np} c_p + \delta q_n \bar{T}^n_m \bar{p}^m - \delta q_n \bar{r}^n = 0$$

وبتعويض الثوابت الاختيارية بقيمتها المحسوبة في العلاقة (8.51) ينتج:

$$\delta I = -\delta q_n T^{np} (H^{ip})^{-1} \bar{H}^i_m \bar{p}^m + \delta q_n T^{np} (H^{ip})^{-1} T^{lk} q_k + \delta q_n \bar{T}^n_m \bar{p}^m - \delta q_n \bar{r}^n = 0 \quad (8.54)$$

ومنها نحصل بعد التجميع على كامل عقد المنشأ على جملة المعادلات الخطية النهائية لانتقالات العقد

$$\sum_1^n (k^{nk} q_k - \bar{r}^n) = 0 \quad (8.55)$$

حيث:

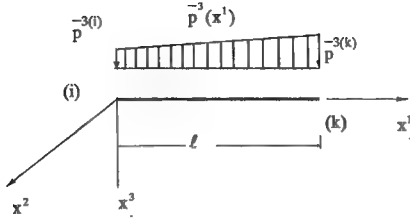
$$k^{nk} = T^{np} (H^{ip})^{-1} T^{lk} \quad (8.56)$$

مصفوفة القساوة للعنصر المنتهي والمقدار:

$$\bar{r}^n = T^{np} (H^{ip})^{-1} \bar{H}^i_m \bar{p}^m - \bar{T}^n_m \bar{p}^m + \bar{r}^n = 0 \quad (8.57)$$

هو شعاع القوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة.

## 8-6- عنصر منتهي إطارى مستوي



شكل 8-1: عنصر منتهي إطارى مستوى يحمل بحمولة موزعة على شكل شبه منحرف

سوف يتم إيضاح الخطوط الأساسية للتطبيق العام للطريقة كطريقة طرفية بناء على تطبيق بسيط وسهل وهو العنصر الإطارى ، والذي درس في الفصل الخامس بتطبيق طرق عناصر منتهية مختلفة. حيث درس بالطريقة التقليدية-نموذج الانتقالات وبالطريقة المحيطة-نموذج الإجهادات وباستخدام التطبيق المقترح لنموذج الانتقالات مع اعتبار تأثير الحمولة أي بعبارة أخرى استخدام التطبيق الحالي مع اتخاذ العلاقة (8.31) كأساس متغيراتي. وفي التطبيق الأخير استنبطت توابع تقريبية محققة لمجمل المعادلة التفاضلية الحاكمة للمسألة موضوع الدراسة والشروط الطرفية اللازمة "على العنصر المنتهي". وشرحت تفاصيل الحصول عليها ولا حاجة هنا لتكرار هذه التفاصيل ويكتفى بإعطاء صيغة التوابع التقريبية الخاصة بهم الانعطاف:

$$u_{x^3}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^1 & (x^1)^2 & (x^1)^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{EI_z} \begin{vmatrix} x^4 \\ 24 \\ -\frac{x^5}{120l} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x^5}{120l} \\ \frac{-x^3(i)}{p} \\ \frac{-x^3(k)}{p} \end{vmatrix}$$

$$u_i = M_i^k c_k + \bar{M}_i(r) \bar{p}^{-x^3}(r) ; i = x^3 ; k = 0,1,2,3,4; (r) = (i), (k)$$

(8.58)

شدات تابع الحمولة شبه المنحرفة في العقدتين (i), (k) على التوالي.  
 باستبعاد علاقات قوى المقطع - الانتقالات :

$$M^{x^2} = -EI x^2 \frac{\partial^2 u_3(x)}{(\partial x^1)^2} \quad (8.59)$$

$$Q^{x^3} = \frac{\partial M^{x^2}}{\partial x^1} - EI x^2 \frac{\partial^3 u_3(x)}{(\partial x^1)^3}$$

نحصل من التوابيع  $u_i$  على توابيع قوى المقطع  $T^i$  ضمن العنصر المنتهي:

$$\begin{bmatrix} Q^{x^3} \\ M^{x^2} \end{bmatrix} = EI x^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ & -2 & -6x^1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x^1 + \frac{(x^1)^2}{2!} & \frac{(x^1)^2}{2!} \\ -\frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6!} & -\frac{(x^1)^3}{6!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \end{bmatrix} \quad (8.60)$$

وبتمويض معادلات الأطراف  $s_\sigma$  في العلاقة الأخيرة أي:  $x^1(i) = 0$ ;  $x^1(k) = 1$   
 نحصل على توابيع قوى المقطع  $T^i = \sigma_{ij} n_j$  على الأطراف  $s_\sigma$  بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} -Q^{x^3(i)} \\ -M^{x^2(i)} \\ Q^{x^3(i)} \\ M^{x^2(i)} \end{bmatrix} = EI x^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1^2}{3} & -\frac{1^2}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \end{bmatrix} \quad (8.61)$$

$$T^i = \sigma_{ij} n_j$$

$$-T^{i(b)} = R^{i(b)k} c_k + \bar{R}^{i(b)}_{(r)} \bar{p}^{x^3(r)}$$

تشتق توابع الانتقالات على الأطراف من تابع الانتقالات ضمن العنصر المنتهي (8.58) بتعويض معادلات الأطراف في العلاقة المذكورة وفي تابع الدورانات المشتق منها وفق العلاقة

$$\varphi_{x^2} = -\partial u_{x^3} / \partial x^1$$

$$\begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{EI x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l^4}{30} & \frac{l^4}{120} \\ \frac{l^3}{8} & -\frac{l^3}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \end{bmatrix}$$

$$u_{i(b)} = N_{i(b)}^k c_k + \bar{N}_{i(b)}(r) \bar{p}^3(r)$$

(8.62)

التوابع السابقة المشتقة من توابع الانتقالات ضمن العنصر المنتهي يجب أن تتطابق مع توابع الانتقالات على أطراف العنصر المنتهي التي تحقق شروط الاستمرارية والتطابق. وحق تحقق هذه الأخيرة مثل هذه الشروط يجب أن يتعلق تابع الانتقالات على طرف ما بالاحداثيات الديكارتية المستقلة وبدرجات الحرية لهذا الطرف دون الأطراف الأخرى. والتوابع التالية:

$$\begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} \quad (8.63)$$

$$u_{i(b)} = I_{i(b)}^{m(e)} u_{m(e)}$$



تحقق شروط الاستمرارية والتطابق.

لتحديد الثوابت العشوائية  $c_k$  نستخدم العلاقة (8.42) ولذلك لابد من حساب التكامل

$$\int_V u_{i,j} \delta \sigma_{ij}^0 dV \text{ على حجم العنصر.}$$

في حالة العنصر الإطاري الخاضع لتأثير الإنعطاف وباعتبار الفرضيات التبسيطية الخاصة بهذه الحالة كفرضيات بقاء المقاطع مستوية وفرضية برنولي وإهمال تأثير تشوهات القص وجدنا أن المركبت  $u_{i,j}$  تنقلص لتقتصر على المركبة  $u_{x^3,x^1}$  وأن مركبات الإجهادات  $\sigma_{ij}^0$  تنقلص أيضا لتقتصر على الإجهاد  $\sigma^{x^1x^1}$  واللتين يمكن حسابهما بالعلاقاتين:

$$\begin{aligned} u_{x^3,x^1} &= -x^3 \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} \\ \sigma^{x^1x^1} &= -E x^3 \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} \end{aligned} \quad (8.64)$$

والمشتق الثاني لتابع الاتقالات (8.58) هو بالتفصيل:

$$\frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{E l_{x^2}} \left| \frac{(x^1)^2}{2} - \frac{(x^1)^3}{6l} \right| \frac{(x^1)^3}{6l} \left| \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \end{bmatrix} \right|$$

$$u_i = p_i^k c_k + \bar{p}_i(r) p^{-x^3(r)} ; i = x^3 ; k = 0,1,2,3,4; (r) = (i),(k) \quad (8.65)$$

ويصبح التكامل الحجمي كما يلي:

$$\begin{aligned}
\int_V u_{i,j} \delta \sigma^{ij} dV &= \int_0^1 \int_A -x^3 \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} E (-x^3 \delta \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2}) dx^1 dA \\
&= \int_A (x^3)^2 dA \int_0^1 \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} E \delta \left( \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} \right) dx^1 \\
&= EI \int_0^1 \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} \delta \left( \frac{\partial^2 u_{x^3}}{(\partial x^1)^2} \right) dx^1
\end{aligned} \tag{8.66}$$

وبعد تعويض (8.65) في العلاقة السابقة يأخذ التكامل الحجمي السابق الصيغة التفصيلية التالية:

$$\begin{aligned}
\int_V u_{i,j} \delta \sigma^{ij} dV &= \int_0^1 (P^k c_k + \bar{P}(r) P^{-x^3}(r)) EI \int_A P^1 \delta c_1 dx^1 \\
&= c_k \left( \int_0^1 P^k EI \int_A P^1 dx^1 \right) \delta c_1 + P^{-x^3}(r) \left( \int_0^1 \bar{P}(r) EI \int_A P^1 dx^1 \right) \delta c_1 \\
&= c_k H^{kl} \delta c_l + P^{-x^3}(r) \bar{H}(r) \delta c_1
\end{aligned} \tag{8.67}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
H^{kl} &= \int_0^1 P^k EI \int_A P^l dx^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4I & 6I^2 \\ 0 & 0 & 6I^2 & 12I^3 \end{bmatrix} \\
\bar{H}(r) &= \int_0^1 \bar{P}(r) EI \int_A P^1 dx^1 = \begin{bmatrix} I^3 & 11I^4 \\ 4 & 20 \\ I^3 & I^4 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8.68}$$

نلاحظ أن المصفوفات السابقة يمكن الحصول عليها بإيجاز التكامل الطربي على أطراف العنصر المنتهي  $\int_{\mathbb{S}} \delta \sigma^j n_j u_i dV$  المكافئ للتكامل  $\int_V u_{i,j} \delta \sigma^j dV$  وهي لحالة التكامل الطربي كما يلي:

$$\begin{aligned} \int_V u_{i,j} \delta \sigma^j dV &= \int_{\mathbb{S}} \delta \sigma^j n_j u_i ds = c_k R^{i(b)} N_{i(b)}^k \delta c_1 + p^{-x^3}(r) R^{i(b)} \bar{N}_{i(b)}(r) \delta c_1 \\ H^{kl} &= R^{i(b)} N_{i(b)}^k \\ \bar{H}_r^l &= R^{i(b)} \bar{N}_{i(b)}(r) \end{aligned} \quad (8.69)$$

ويمكن ببساطة التأكد من تطابق المصفوفات الواردة في العلاقة (8.68) والعلاقة (8.69).  
 نستخدم الآن إحدى العلاقتين (8.42) و (8.43) لتعيين الثوابت العشوائية  $c_k$ . في الحالتين لابد من إيجاز التكامل  $\int_{\mathbb{S}} \delta \sigma^j n_j u_i dV$  والتكامل  $\int_{\mathbb{S}_u} \delta \sigma^j n_j u_i dV$ . وهنا يجب التنويه أن عملية تحديد الثوابت العشوائية هي عملية بديلة للاستنباط الهندسي وتجري على مستوى العنصر المنتهي وهي عمليا تستخدم موهنة غاوص السارية للفعول على أي جزء مقطوع من الوسط المدروس سواء كان منتهيا أو تفاضليا. وإن الأطراف  $S_\sigma$  و  $S_u$  هي الأطراف الحقيقية للعنصر التي تكون عليها القوى مفترضة والانتقالات مفترضة على التوالي والتي يجب تحديدها وفقا للمجاهيل التي يجري استخدامها للاستنباط. ففي مثالنا هنا لا يوجد قوى خارجية أو إجهادات مفترضة على مستوى العنصر ولا تستخدم أي قوى مفترضة في عملية الاستنباط بالتالي فالتكامل  $\int_{\mathbb{S}_\sigma} \delta \sigma^j n_j u_i dV$  معلوم. وعليه تكون أطراف العنصر كلها من النموذج  $S_u$  حيث تستخدم درجات الحرية الأربعة للعنصر المنتهي أي الانتقال والدوران لكل عقدة في عملية الاستنباط. نستخدم الآن لحقل الانتقالات المفترضة  $\bar{u}_i$  التابع التالي الذي يحقق شروط الاستمرارية والتطابق ويتطابق مع  $u_i$ :

$$\begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} \quad (8.70)$$

$$\bar{u}_{i(b)} = \bar{I}_{i(b)}^{m(e)} u_{m(e)}$$

عندها يأخذ التكامل  $\int_{s_u} \delta \sigma_{ij}^n \bar{u}_i dV$  الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} \int_{s_u} \delta \sigma_{ij}^n \bar{u}_i ds &= \delta c_1 R^{i(b)l} I_{l(b)}^{m(e)} u_{m(e)} = \delta c_1 \left( \int_{s_u} R^{i(b)l} I_{l(b)}^{m(e)} ds \right) u_{m(e)} \\ &= \delta c_1 T^{lm(e)} u_{m(e)} \end{aligned} \quad (8.71)$$

والمكافئة تفصيليا لما يلي:

$$\delta c_1 T^{lm(e)} u_{m(e)} = \begin{bmatrix} \delta c_0 & \delta c_1 & \delta c_2 & \delta c_3 \end{bmatrix} EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & -6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} \quad (8.72)$$

$$T^{lm(e)} = EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & -6l \end{bmatrix} \quad (8.73)$$

بتعويض التكاملات السابقة في إحدى العلاقتين (8.42) أو (8.43) نحصل على:

$$\delta c_1 T^{lm(e)} u_{m(e)} = c_k H^{kl} \delta c_1 + \bar{p} x^3(r) \bar{H}(r)^l \delta c_1 \quad (8.74)$$

$$H^{kl} c_k = T^{lm(e)} u_{m(e)} - \bar{p} x^3(r) \bar{H}(r)^l$$

بحل جملة المعادلات السابقة بالنسبة للثوابت العشوائية نجد أنه يمكننا بعد استبعاد العمليات الصفرية الحصول على الثوابت العشوائية اللازمة لتابعة الحل وتقييم الحد الوارد في المبدأ المتغيراتي أي الشكل التكاملي للشروط الطرفية الطبيعية:

$$c_{ql} = H_{ql} T^{lm(e)} u_{m(e)} - H_{ql} \bar{p} x^3(r) \bar{H}(r)^l \quad (8.75)$$

حيث تعطى للمصفوفة  $H_{ql}$  بالشكل:

$$H_{ql} = \frac{1}{EI x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2l^2} & \frac{1}{3l^3} \end{bmatrix} \quad (8.76)$$

وبعد إنجاز جداء المضارب الوارد في العلاقة (8.75) نحصل تفصيليا على:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u x^3(i) \\ \varphi x^2(i) \\ u x^3(k) \\ \varphi x^2(k) \end{bmatrix} - \frac{1}{EI x^2} \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ -\frac{40}{7l} & -\frac{60}{l} \\ \frac{120}{120} & \frac{40}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} x^3(i) \\ \bar{p} x^3(k) \end{bmatrix} \quad (8.77)$$

نقيم الآن التابعي الوارد في المبدأ المتغيراتي والذي يمثل الشكل التكاملي للشروط الطرفية الطبيعية بتعويض  $u_n$  بمكافئها من العلاقة (8.61) وأخذ متغير  $u_i$  من العلاقة (8.63) لنحصل على:

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_S \sigma_{ij}^n \delta u_i ds - \int_{s_\sigma} \bar{T}^j \delta u_j ds \\
&= \int_S (R^{i(b)k} c_k + \bar{R}^{i(b)}(r) \bar{p}^{x^3}(r)) I_{i(b)}^{m(e)} \delta u_{m(e)} - \int_{s_\sigma} \bar{T}^{i(b)} I_{i(b)}^{m(e)} \delta u_{m(e)} \\
&\quad (8.78)
\end{aligned}$$

وبعد تعويض الثوابت العشوائية  $c_k$  المحسوبة وفق العلاقة (8.75) في التابعي السابق نحصل على:

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{\Pi} (R^{i(b)k} H_{kl} T^{ln(d)} u_{n(d)} I_{i(b)}^{m(e)} \delta u_{m(e)} \\
&\quad - H_{kl} \bar{H}_{(r)}^l R^{i(b)}(r) \bar{p}^{x^3}(r) I_{i(b)}^{m(e)} \delta u_{m(e)} \\
&\quad + \bar{R}^{i(b)}(r) \bar{p}^{x^3}(r) I_{i(b)}^{m(e)} \delta u_{m(e)}) ds \\
&\quad - \int_{s_\sigma} \bar{T}^{i(b)} I_{i(b)}^{m(e)} \delta u_{m(e)} \\
&= u_{n(d)} T^{km(e)} H_{kl} T^{ln(d)} \delta u_{m(e)} - H_{kl} \bar{H}_{(r)}^l T^{km(e)} \delta u_{m(e)} \\
&\quad + \bar{T}^{m(e)}(r) \bar{p}^{x^3}(r) \delta u_{m(e)} - \bar{f}_2^{m(e)} \delta u_{m(e)} \\
&= u_{n(d)} k^{n(d)m(e)} \delta u_{m(e)} - f_1^{m(e)} \delta u_{m(e)} - \bar{f}_2^{m(e)} \delta u_{m(e)} \\
&\quad (8.79)
\end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
K^{m(e)n(d)} &= T^{km(e)} H_{kl} T^{ln(d)} \\
f_1^{m(e)} &= T^{km(e)} H_{kl} \bar{H}_{(r)}^l \bar{p}^{x^3}(r) - \bar{T}^{m(e)}(r) \bar{p}^{x^3}(r) \\
\bar{f}_2^{m(e)} &= \int_{s_\sigma} \bar{T}^{i(b)} I_{i(b)}^{m(e)} ds \\
\bar{T}^{m(e)}(r) &= \int_{\Pi} \bar{R}^{i(b)}(r) I_{i(b)}^{m(e)} ds \\
&\quad (8.80)
\end{aligned}$$

نلاحظ أنه لتقييم الحد الوارد في المبدأ للتغيراني أي الشكل التكاملي للشروط الطرفية الطبيعية  
 لاحاجة لنا لمعرفة الثوابت العشوائية  $c_0, c_1$  وذلك لأن المصفوفة  $R^{(b)k}$  تحتوي في عموديهما  
 الأول والثاني على أصفار .

وأنه بعد تقييم الجملات الواردة في العلاقات (8.80) أن:

$$K^{m(e)n(d)} = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (8.81)$$

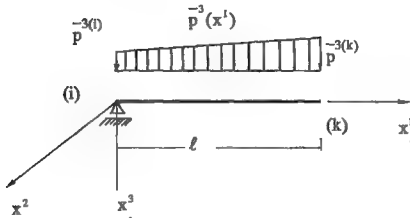
$$\bar{T}^{m(e)}_{(r)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

$$\bar{f}^m(e) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{71}{20} & \frac{31}{20} \\ -\frac{l^2}{20} & -\frac{l^2}{30} \\ -\frac{71}{20} & -\frac{31}{20} \\ -\frac{31}{10} & -\frac{71}{60} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{p}^{x^3(l)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{bmatrix} \quad (8.83)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{71}{20} & \frac{31}{20} \\ -\frac{l^2}{20} & -\frac{l^2}{30} \\ \frac{31}{20} & \frac{71}{20} \\ \frac{l^2}{30} & \frac{l^2}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}^{x^3(i)} \\ \bar{p}^{x^3(k)} \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن القوى المركزة المكافئة للحمولة الموزعة مساوية لتلك التي تنتج في وثاقات جازر موثوق من الطرفين وعمل بالحمولة الموزعة نفسها.

### 7-8- اعتبار تأثير شروط الاستناد على مصفوفة القساوة



شكل 8-2: عنصر منتهي إطارى مستوى بشروط استناد مختلفة

سوف يتم إيضاح الخطوط الأساسية للحصول على مصفوفة القساوة لعنصر إطارى مستند استناداً بسيطاً في طرافه اليساري حيث مبدأ الإحداثيات الخاصة بالعنصر.

هنا نجد أن درجات الحرية  $u_{x^2(i)}$ ,  $u_{x^3(k)}$ ,  $\varphi_{x^2(k)}$  هي التي يجب استخدامها للاستنباط الهندسي حيث لدينا على الطرف اليساري جزء سطح  $s_0$  عليه القوى معلومة وهو عزم الانعطاف  $M^{x^2(i)}$  وبالتالي يكون  $T^i$  على  $s_0$  مكافئاً لما يلي :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -M^{x^2(i)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = EI_{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}^{x^2(i)} \\ \bar{p}^{x^3(i)} \end{bmatrix} \quad (8.84)$$

$$T^i = \sigma_{ij}^i$$

$$= T^{i(b)} = R \sigma^{i(b)k} c_k + \bar{R} \sigma^{i(b)(r)} \bar{p}^{x^3(r)}$$



والانتقالات الموافقة لهذه للركبة هي:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi x^2(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{EI x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \end{bmatrix}$$

$$u_{i(b)} = A_{i(b)}^k c_k + \bar{A}_{i(b)(r)} \bar{p} x^3(r) \quad (8.85)$$

وتصبح المصفوفات  $H^{ik}, \bar{H}^i(r)$  المحسوبة وفق العلاقات (8.47)، (8.48) معطاة تفصيلياً كالتالي:

$$H^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} \quad (8.86)$$

$$\bar{H}^i(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix}$$

وجملة المعادلات لتحديد الثوابت العشوائية  $c_k$  هي من الشكل:

$$EI_{x^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & -6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u x^3(i) \\ \varphi x^2(i) \\ u x^3(k) \\ \varphi x^2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \end{bmatrix}$$

$$H^{ik} c_k = T^{lm(e)} u_{m(e)} + \bar{H}^i(r) \bar{p} x^3(r) \quad (8.87)$$

نستخدم الآن الشرط (8.52) لإيجاد علاقة تربط المجهول غير المستقل  $\varphi_{x^3(i)}$  وغير المستخدم في عملية الاستنباط وبين بقية المجهول. وبالتالي يجب علينا حساب توابع قوى المقطع  $T^i = \sigma^{ij} n_j$  على الأطراف  $s_u$  والمكافئة لماليبي:

$$\begin{bmatrix} -Qx^3(i) \\ 0 \\ Qx^3(i) \\ Mx^2(i) \end{bmatrix} = EI x^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1^2}{3} & -\frac{1^2}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \end{bmatrix}$$

$$T^i = \sigma^{ij} n_j \quad (8.88)$$

$$= T^{i(b)} = Ru^{i(b)} k_{c_k} + \bar{R}u^{i(b)}(r) \bar{p} x^3(r)$$

نستخدم الآن لحقل الانتقالات المعلومة  $\bar{u}_i$  التابع (8.70) الذي يحقق شروط الاستمرارية والتطابق، عندما يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} \int_{s_u} \sigma^{ij} n_j \delta \bar{u}_i ds &= \delta c_1 \left\{ \int_{s_u} L_{i(b)}^{m(e)} Ru^{i(b)} ds + \int_{s_u} \bar{R}u^{i(b)}(r) \bar{p} x^3(r) ds \right\} \\ &= \delta c_1 \{ T u^{lm(e)} u_{m(e)} + \bar{T} u^l(r) \bar{p} x^3(r) \} \\ &= -[\delta c_0 \quad \delta c_1 \quad \delta c_2 \quad \delta c_3] \left\{ EI x^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u x^3(i) \\ \varphi x^2(i) \\ u x^3(k) \\ \varphi x^2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1^2}{3} & -\frac{1^2}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \end{bmatrix} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$(8.89)$$

وباعتبار أن المقادير المستخدمة للاستنباط هي  $u_{x^2(i)}, u_{x^2(k)}, \varphi_{x^2(i)}, \varphi_{x^2(k)}$  وأن  $\varphi_{x^2(i)}$  غير مستخدمة للاستنباط ولا يمكن أن تكون قيمتها عشوائية، إذ أنها قيمة مرتبطة بالجهاديل الأخرى حيث لا يمكن أن نختار  $\delta \varphi_{x^2(i)} = 0$  وبالتالي فالمعادلة الثانية من المعادلات السابقة تقضي إلى النتيجة التالية:

$$2c_2 = 0; c_2 = 0 \quad (8.90)$$

وبتمريض هذه النتيجة في جملة المعادلات (8.87) وحل هذه المعادلات بالنسبة للثوابت  $c_i$  سنجد أن:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{?}{3} & ? & \frac{?}{2l} & \frac{?}{-2} \\ \frac{?}{2l^2} & 0 & \frac{?}{-2l} & \frac{?}{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2l^3} & 0 & \frac{1}{-2l^3} & \frac{1}{-2l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x^3(i)} \\ \varphi_{x^2(i)} \\ u_{x^3(k)} \\ \varphi_{x^2(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{EI x^2} \begin{bmatrix} \frac{?}{l^3} & \frac{?}{l^3} \\ \frac{80}{80} & \frac{120}{120} \\ 0 & 0 \\ \frac{11l}{240} & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} x^3(i) \\ \bar{p} x^3(k) \end{bmatrix} \quad (8.91)$$

نلاحظ أن قيمة الثابت  $c_1$  مساوية لقيمة  $\varphi_{x^2(i)}$  فيما لو حسب الدوران في طرف الجائر اليساري والنتج عن الحملات الموزعة وانتقال وجوران العقد.

وأخيراً، وبمعرفة المصفوفة  $T^{lm(e)}$  نجد بعد تقييم الجداءات الواردة في العلاقات (8.80) أن:

$$K^{lm(e)n(d)} = EI x^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{l^3} & 0 & \frac{3}{-l^3} & \frac{3}{-l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^3} & 0 & \frac{3}{l^3} & \frac{3}{l^2} \\ -\frac{3}{l^2} & 0 & \frac{3}{l^2} & \frac{3}{1} \end{bmatrix} \quad (8.92)$$

مصفوفة القساوة للعنصر المستند استناداً بسيطاً من طرفه اليساري وأن:

$$\bar{T}^{m(e)}_{(r)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ l^2 & l^2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (8.93)$$

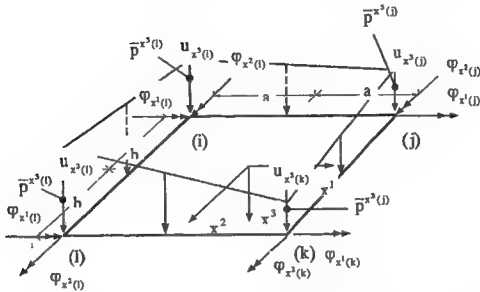
وبالتالي تكون القوى المركزة على العقد والمكافئة للحمولة الموزعة كما يلي:

$$\bar{f}^{m(e)} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 \\ -\frac{11}{40} & -\frac{1}{10} \\ \frac{11l^2}{40} & -\frac{l^2}{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{l^2}{3} & -\frac{l^2}{6} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{p}x^3(i) \\ \bar{p}x^3(k) \end{bmatrix} \quad (8.94)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 \\ \frac{11}{40} & \frac{1}{10} \\ \frac{11l^2}{120} & \frac{l^2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}x^3(i) \\ \bar{p}x^3(k) \end{bmatrix}$$

وهي بنورها مساوية لتلك التي تنتج في مساند الجائز الموثوق من الطرف اليميني والمتفصل من الطرف اليساري والحمل بالحمولة للوزعة نفسها.

### 8-8- عنصر مستطيل لانعطاف البلاطات بمحولات لاعلى التعيين:



شكل(8-3):عنصر منته مستطيل لبلاطة رقيقة عملة بمحولات موزعة لا على التعيين، المحاور الإحداثية، درجات الحرية، الحمولات.

لنقطع من بلاطة عملة بمحمولة موزعة لاعلى التعيين  $\bar{p}^{x^3}(x^1, x^2)$  عنصراً مستطيلاً ونشير إلى جملة محاور إحداثية كما في الشكل. لتكن قيم شدة الحمولة على عقد العنصر  $\bar{p}^{x^3(i)}, \bar{p}^{x^3(j)}, \bar{p}^{x^3(k)}, \bar{p}^{x^3(l)}$ . لنفترض أن المعادلة التفاضلية الحاكمة والمعتبرة لحالة البلاطة هذه من الشكل:

$$u^0_{x^3, x^1 x^1 x^1} + u^0_{x^3, x^2 x^1 x^1} + u^0_{x^3, x^1 x^2 x^2} + u^0_{x^3, x^2 x^2 x^2} = \frac{\bar{p}^{x^3}(x^1, x^2)}{k} \quad (8.95)$$

حيث  $u^0_{x^3}$  هي تابع الانتقالات،  $k$  ثابت صلابة البلاطة.

يحتوي التابع التقريبي العادي لهذا العنصر على اثني عشر ثابتاً وعددها مساوٍ لعدد درجات الحرية وهي انتقال ودورانين لكل عقدة. لكي تتمكن من تمثيل حمولات العنصر نختار توابع الانتقال بالشكل:

$$\begin{aligned} u_x^*(x^1, x^2) = & c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 (x^1)^2 + c_4 x^1 x^2 + c_5 (x^2)^2 + c_6 (x^1)^3 + c_7 (x^1)^2 x^2 \\ & + c_8 x^1 (x^2)^2 + c_9 (x^2)^3 + c_{10} (x^1)^3 x^2 + c_{11} x^1 (x^2)^3 + c_{12} (x^1)^2 (x^2)^2 \\ & + c_{13} (x^1)^4 x^2 + c_{14} x^1 (x^2)^4 + c_{15} (x^1)^3 (x^2)^3 \end{aligned} \quad (8.96)$$

لمثل هذا الاختيار يمكن تعيين الثوابت الاختيارية الزائدة باستخدام الشروط التي تنتج عن اشتقاق المعادلة (8.96) وفق المعادلة (8.95) كما سنرى لاحقاً. بالطبع يمكن اختيار التسابع التقريبي بأشكال مختلفة. على سبيل المثال يمكن نختار كثير حدود يحتوي 22 حداً وهي كل حدود الدرجة السادسة من مثلث باسكال (21 حداً) والحد  $(x^1)^3 (x^2)^3$ . لكن في مثل هذه الحالات تعطي المعادلة التفاضلية عدداً من الشروط أقل من اللازم لتحديد الثوابت الاختيارية. وهذا يعني أن هناك حلولاً مختلفة لتحقيق المعادلة التفاضلية (8.95). بعد هذه الملاحظة لنعد إلى مسألة تحديد الثوابت الاختيارية.

باشتقاق التابع التقريبي (8.96) وفق المعادلة التفاضلية (8.95) يجب أن يكون:

$$k \begin{bmatrix} 8 & 24x^1 & 24x^2 & 72x^1x^2 \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{15} \end{bmatrix} = \bar{p}^{x^3}(x^1, x^2) \quad (8.97)$$

نستخدم الآن التوابع التقريبية للتعبير عن تابع الحمولة  $\bar{p}^{x^3}(x^1, x^2)$  ضمن العنصر المنتهي بدلالة قيم الحمولة على عقده ولهذا الغرض نختار التابع التقريبي لـ  $\bar{p}^{x^3}(x^1, x^2)$  بالشكل:

$$\bar{p}^{x^3}(x^1, x^2) = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 & x^1x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (8.98)$$

والعلاقة التالية بين الثوابت الاختيارية C و

$$\begin{vmatrix} c_{13} \\ c_{14} \\ c_{15} \\ c_{16} \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} \frac{1}{8}\alpha_0 \\ \frac{1}{24}\alpha_1 \\ \frac{1}{24}\alpha_2 \\ \frac{1}{72}\alpha_3 \end{vmatrix} \quad (8.99)$$

تحقق المعادلة التفاضلية.

نحدد الآن الثوابت بدلالة قيم الحمولة على عقد العنصر من التابع التقريبي (8.98) بتعويض إحداثيات العنصر فيها وعكس العلاقة الناتجة:

$$\begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(j) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \\ -x^3(l) \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (8.100)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{ab} & \frac{1}{ab} & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{ab} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{ab} & -\frac{1}{ab} & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(j) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \\ -x^3(l) \\ p \end{bmatrix} \quad (8.101)$$

بتعويض الثوابت الاختيارية  $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$  الفائضة عن عدد درجات حرية عقد العنصر بقيمة المحددة من العلاقتين (8.99), (8.101) في العلاقة (8.96) نحصل على:

$$u_x(x, x^2) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & (x^2)^2 & x x^2 & (x^2)^2 & (x^2)^2 x^2 & (x^2)^2 x^2 & (x^2)^3 & (x^2)^3 & (x^2)^3 x^2 & x(x^2)^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{4k} \begin{bmatrix} (x^1)^2 (x^2)^2 & (x^1)^4 x^2 & x^1 (x^2)^4 & (x^1)^3 (x^2)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\ \frac{24a}{1} & \frac{24a}{1} & \frac{24a}{1} & \frac{24a}{1} \\ \frac{24b}{1} & \frac{24b}{1} & \frac{24b}{1} & \frac{24b}{1} \\ \frac{72ab}{72ab} & \frac{72ab}{72ab} & \frac{72ab}{72ab} & \frac{72ab}{72ab} \end{bmatrix} \quad (8.102)$$

بعد حذف الثوابت الاختيارية المتبقية من العلاقة السابقة باستغلال عملية الاستنباط الهندسي المعروفة نحصل على التابع التقريبي للانتقال ويكتفى بذلك جزئه غير المتجانس إذ أن جزئه المتجانس مكافئ للتتابع التقريبي لعنصر البلاطة غير المتطابق الوارد في [12] والمعطى تفصيليا في هذا الكتاب عبر العلاقة (6.181):

$$\bar{N}_{ij} \bar{p}^j = \frac{1}{4k} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & \bar{N}_3 & \bar{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\ \frac{24a}{1} & \frac{24a}{1} & \frac{24a}{1} & \frac{24a}{1} \\ \frac{24b}{1} & \frac{24b}{1} & \frac{24b}{1} & \frac{24b}{1} \\ \frac{72ab}{72ab} & \frac{72ab}{72ab} & \frac{72ab}{72ab} & \frac{72ab}{72ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -x^3(i) \\ p \\ -x^3(j) \\ p \\ -x^3(k) \\ p \\ -x^3(l) \\ p \end{Bmatrix} \quad (8.103)$$

حيث:



$$\bar{N}_1 = a^2 b^2 \left(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{(x^2)^2}{b^2}\right)$$

$$\bar{N}_2 = a^4 b \frac{x^2}{b} \left(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2}\right)^2$$

$$\bar{N}_3 = ab^4 \frac{x^1}{a} \left(1 - \frac{(x^2)^2}{b^2}\right)^2$$

$$\bar{N}_4 = a^3 b^3 \frac{x^1}{a} \frac{x^2}{b} \left(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{(x^2)^2}{b^2}\right)$$

(8.104)

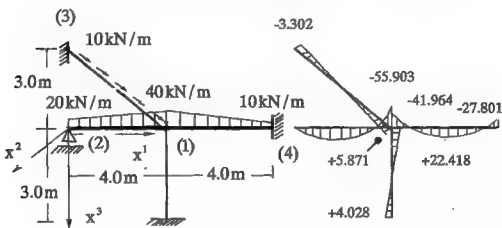
من المعادلات (8.103)، (8.104) يمكن إستنتاج التوابع التقريبية لحالة حمولات موزعة بانتظام على سطح البلاطة. ففي هذه الحالة يكون  $\bar{p} = \bar{p}^{(0)} = \bar{p}^{(1)} = \bar{p}^{(2)} = \bar{p}^{(3)} = \bar{p}^{(4)}$  وعندئذ ينقلص الجزء غير المتجانس للتابع التقريبي ليصبح على الشكل:

$$\bar{N}_{ij} \bar{p}^j = \bar{p} \frac{a^2 b^2}{8k} \left(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{(x^2)^2}{b^2}\right) \quad (8.105)$$

## 8-9 — نتائج عددية

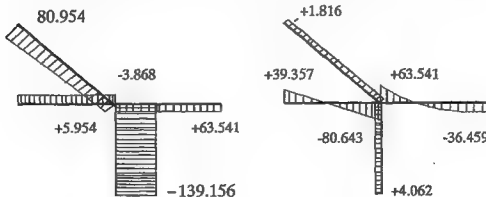
إطار مؤلف من أربع قضبان أبعاده وخواصه الهندسية معطاة في الشكل 8-4-8. الإطار متمفصل في نقطة استناده (2) وهو موثوق في نقاط استناده (3)، (4)، (5). يخضع القضيب (1) (3) إلى حمولة نظامية باتجاه محور القضيب ومتغيرة خطياً شدتها في العقدة (3)  $10 \text{ kN/m}$  وفي العقدة (1)  $20 \text{ kN/m}$ . كما يخضع القضبان (1) (2) و (1) (4) إلى حمولة عرضانية عمودية على محوريهما وموزعة خطياً شدتها موضحة على الشكل نفسه. جمعت نتائج الحل في مخططات القوى الناعمة والقوى القاصية وعزوم الانعطاف، وهي موضحة في الأشكال 8-4-8، b، c، d. يلاحظ أن نتائج الحل متطابقة باستخدام أي من المبادئ للتغيريات (8.20)، (8.30)، (8.32)، وهي بدورها

مطابقة للحل الدقيق. من الجدير بالذكر أيضاً أن استخدام التوابع التقريبية المحققة لمعادلة لاغرانج بالإضافة إلى الشروط الطرفية اللازمة قد سمح باعتبار شروط استناد العنصر (1)(2) على قساوته. والنتائج التي حصلنا عليها باستخدام الطريقة الحالية تمثل تحسناً نوعياً لنتائج طريقة العناصر المنتهية ويكفي حل هذا المنشأ بالطرق التقليدية المعروفة للتأكد من ذلك. إن تطابق نتائج المبادئ المتغيرة الثلاث (8.20)، (8.30)، (8.32) يعود إلى تمكنا من إيجاد توابع تقريبية تامة تتصف بصفة الاستمرارية وتحقق كافة شروط استخدام المبادئ المتغيرة المذكورة أعلاه. أما إذا لم تتمكن من إيجاد مثل هذه التوابع فينصح باستخدام التطبيق العام الوارد في الفقرة 4-8.



شكل 8-4-ب: إطار مستوي: مخطط عزوم الإنعطاف شكل 8-4-أ: إطار مستوي:

الحمولات، الخواص الهندسية للحمولات، الاستناد، العناصر المنتهية والمحاور الإحداثية



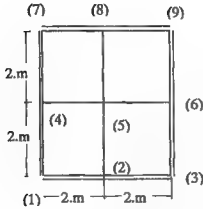
شكل 8-4-د: مخطط القوى الناعمة

شكل 8-4-ج: مخطط قوى القص

من الواضح أن طريقة الاستنباط الهندسية لعنصر البلاطة الموصوف في الفقرة 8-8 لا تؤدي إلى توابع محققة لشروط الاستمرارية وشروط استخدام المبادئ المتفرعية للفتحة، إذ نحصل بنتيجة الاستنباط الهندسي على عنصر منتهي يتصف بعدم التوافق (nonconform). وإذا أردنا تحقيق الشروط المذكورة لابد من استخدام التطبيق العام للطريقة الواردة في الفقرة 8-4. بالرغم من ذلك يمكن أن تعرض نتائج العنصر المنتهي للدروس في الفقرة 8-8 وتقارن بالحلول التقليدية. ولهذا الغرض درست بلاطة مربعة مستندة استناداً بسيطاً من جميع أطرافها ومحملة بمحمولة موزعة بانتظام على كل مساحتها وثوابتها الهندسية معطاة في الشكل 8-5. قورنت النتائج الحالية للسهم وعزم الإنعطاف في منتصف البلاطة ولعزم الفتل في زاوية البلاطة مع الحل الدقيق وحلول أخرى من المصدرين [13]، [14] ورتبت النتائج في الجدول التالي:

		w(5)	mxx(5)	mxy(1)
الحل الدقيق		0.02495	30.647	-20.789
2x2	DE	0.02526	40.140	-15.509
elements	ACM	0.03250	49.856	-13.828
	DKT	0.3463	49.162	-14.981
6x6	DE	0.02500	31.177	-20.948
elements	ACM	0.02600	32.194	-19.789
	DKT	0.02569	31.854	-20.181
8x8	DE	0.02497	30.954	-20.823
elements	ACM	0.02554	31.512	-20.170
	DKT	0.02537	31.329	-20.452

يلاحظ أن تحسين النتائج ظاهر للعيان وخاصة عند استخدام شبكة عناصر منتهية خشنة.



$$E = 1.82 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$h = 0.1$$

$$\nu = 0.3$$

$$p = 40 \text{ kN/m}^2$$

شكل 8: 5: بلاطة مربعة مستندة بسيطاً تحت تأثير حمولة موزعة بانتظام.

#### 8-10. استنتاجات ختامية

عرضت في فقرة للملاحظات الختامية طريقة تستخدم الشروط الطرفية الطبيعية كقاعدة حسابية متغيرة لحل المعادلات التفاضلية التي تملك شروطاً طرفية لازمة وأخرى طبيعية وبينت الطرق الضرورية لاستنباط التوابيع التقريبية الواجب استخدامها مع مثل هذه القاعدة الحسابية. فبالإضافة إلى تغيير الشكل التقليدي للاستنباط الهندسي من أجل حساب الثوابت العشوائية استخدمت مقولة غاوس في التكامل في تعيين الثوابت العشوائية وتحقيق الشروط الطرفية اللازمة. المهام النهائية في هذه الطريقة هي أيضاً انتقالات العقد وتحدد من الشروط الطرفية الطبيعية للمسألة المطروحة. وبين أيضاً أن نتائج التقنيات الحسابية لطريقة العناصر المنتهية التقليدية-نموذج الانتقالات، والطريقة التقليدية المحيطة-نموذج الإجهادات وطريقة ترفتر تتوحد مع نتائج الطريقة الحالية عند استخدام توابيع تقريبية عميقة لمعادلة لاغرانج والشروط الطرفية اللازمة. بالإضافة إلى ذلك درس الترابط الوثيق بين الطرق الطرفية (boundary methods) وطرق الوسط (domain methods) وكيفية الانتقال من الأولى إلى الأخيرة أو بالعكس باستخدام مقولة غاوس في تحويل التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي. ووضح أن نتائج هذه الطرق واحدة تمتد مراعاة الشروط المتغيرة المطلوبة.

فيما سبق وقفنا في حالة دراسة الإطارات في إيجاد توازن تقريبية للانتقالات تحقق للمعادلة التفاضلية للمسألة المطروحة بالإضافة إلى تحقيقها للشروط الطرفية الكينماتيكية وشروط الاستمرارية والتطابق على أطراف العناصر المنتهية المتجاورة. أما في حالة البلاطة لم تتمكن بعملية الاستنباط الهندسي التقليدية من تحقيق كافة الشروط المتغيرية، والشروط التي لم تحقق هي للشروط الطرفية الكينماتيكية، في مثل هذه الحالة يتوقع أن لا تؤدي الطرق المختلفة الممكن استخدامها إلى نفس النتائج. وينصح في مثل هذه الحالة اللجوء إلى تعيين الثوابت العشوائية بالطريقة المشروحة في الفقرة 4-8. ويمكن إضافة الشروط الطرفية الكينماتيكية  $\int \delta \sigma^H n_j (u_i - \bar{u}_i)$  إلى المبدأ المتغيري (8.17) باستخدام طريقة مضارب لاغرانج حينها يتعدل أسلوب المعالجة المطروح ليصبح مكافئاً لطريقة ترفتر.

وختاماً أنه أن الفقرات المعروضة في جملة الملاحظات الختامية هذه تمثل وجهة نظر المؤلف المستمدة من خبرته في معالجة طرق العناصر المنتهية المختلفة.

## 10-. References

- 1 PIAN, T. H. H.: Finite element methods by Variational principles with relaxed continuity requirement in Engineering, Vol 1-3, Southampton England, Southampton Uni. Press, 1973.
- 2 TREFFTZ, E.: Ein Gegenstueck zum Ritzchen Verfahren , Proc, 2nd Int. Cong. Applied mechanics, Zurich , 1926.
- 3 JIROUSEK, J. and GUEX, L: The hybrid Trefftz finite element model and it is application to plate bending, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 13(1986), 651-93.
- 4 PILTNER, R.: Recent developments in the Trefftz method for finite element and boundary element applications, Advances in Engineering Software 24(1995) 107-115, Elsevier Science, Great Britain, 1995.
- 5 JIROUSEK, J.; VENKATESH, A.: A new FE approach for adaptive reliability assurance , Comp. Struct., Vol. 37(1990) 217-230.
- 6 Szybinski, B.; Zielinski, A. P.: Alternative T-Complete systems of shape functions applied in analytical Trefftz finite elements, Numerical Methods for Partial Differential Equations 11, 375-388(1995).

- 7 ABO DIAB,S : DE - Variationad formulation and FEM solution, Int. J. Num. Meth. Eng., 1992 (not published), paper No. 2130.
- 8 ABODIAB, S.: Differential equation variational formulation for plate bending, Int J. Num. Meth. Eng., 1992(not published), Paper No. 2198.
- 9 ABO DIAB,S :Direkte Zuordnung des Verschiebungs - und Schnittkraftzustand zum Belastungszustand bei der FEM - Verschiebungsmethode in : Festschrift o. prof. Dr.-Ing habil. Heinz mueller 65 Jahre ehemalige Doktoranden gratulieren, Dresden 1994.
- 10 - أبودياب، سليمان: وجهة نظر في معالجة طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات, مجلة باسل الأسد للعلوم الهندسية, العدد الثالث , ص 17-29, أيلول 1995
- 11 ABO DIAB, S.: A suggestion for a finite element approach, The first international workshop on Trefftz method-recent development and perspectives, Summuries and final programme, cracow, Poland, 1996
- 12 ABODIAB, S.: Entwicklung und Einsatz hybrider finiter Stabelemente fuer Aufgaben der linearen Kinetik und Statik von rauemlichen Stabtragwerke - kompakte gerade Staebe, Bauingenieur 66(1991),437-440.
- 13 ZIENKIEWICZ, O. C. : Methode der finiten Elemente, VEB-Fachbuchverlag, Leipzig 1987.
- 14 BATOZ, L. J. BEN TAHHAR, M.: Evalution of a new quadrilateral thin plate bending element, Int. J. Num. Meth. Eng., 12(1982),1655-77.

Address : Sulaiman Abo Diab , Faculty of Civil Engineering,  
Tishreen University, Lattakia, Syria .

-المصطلحات العلمية -

إنكليزي	فرنسي	عربي
Admissible functions	fonctions admissibles	توابع افتراضية
Airy stress functions( Airy)	fonctions des contraintes (Airy)	توابع إجهادات (Airy)
Anisotrope	Anisotrope	لامتناحي
Antisymmetrical	Antisymmetrique	متناظر عكساً
Approximation functions	fonctions Approximatives	توابع تقريبية
Arbitrary parameters	Paramètres Arbitraires	معاملات عشوائية
Axisymmetrical	Axisymmetrique	متناظر محورياً
Banded matrix	Matrice Creuse	مصفوفة شريطية
Bars	Treillis	القضبان (الحملة محورياً)
Beams	Poutres	جوائز
Bending moment	Moment de Flexion	عزم انعطاف
Bernoulli- Euler hypothesis	Hypotheses de / /	فرضيات أويلر - برنولي
Body forces	Forces du Volume	القوى الحجمية
Boundary conditions	Conditions aux limites	الشروط الطرفية
- geometrical	- géométrique	- هندسية
- mechanical	- mécanique	- ميكانيكية
Boundary integrals	Integral aux limites	تكامل طرفي

Calculus of variation	Calcul des Variations	حساب التغيرات
Cauchy stress tensor	Tenseur des contraintes de Cauchy	موتر إجهادات كوشي
Compatibility	Compatibilité	تطابق (توافق)
Complementary energy	Energie complementaire	الطاقة المتممة
Complementary virtual work	Travail virtuelle	العمل الوهمي المتمم
Conditions of compatibility	Conditons de compapabilite'	شروط التطابق
Conservative force	Forces conservatives	قوى محافظة
Constitutive equations	Equations de comportement	معادلات السلوك
Contravariant basis vectors	Vecteurs de base contravariante	أشعة القاعدة الضدية
Covariant basis vectors	Vecteurs de base covariant	أشعة القاعدة الأساسية
Covariant derivative	Covariant derive'	المشتق الأساسي
Convergence of finite element solution	Convergence de solution des Elements finis	تقارب الحل بطريقة العناصر المنتهية
Curvilinear coordinates	Coordonnées curvilignes	الإحداثيات المنحنية
Cylindrical coordinates	Coordonnées cylindriques	الإحداثيات الأسطوانية
Deformation	Deformation	تشوه
Degrees of freedom	Degrés de liberté	درجات الحرية
Delta operator ( $\delta$ )	Operateur variationnel	رمز للتغير ( $\delta$ )
Determinant of a matrix	Determinant d'une matrice	معين مصنوفة
Differential equations	Equations différentielles	معادلات تفاضلية
Discretization of a domain	Discretisation d'un domaine	الفصل النقطي للمجال
Displacement model	Modele des déplacements	نموذج الانتقالات



Displacement shape functions	Functions des formes	توابع الشكل للانتقالات
isplacement , the principle of virtual	Deplacement, principe des virtuels	مبدأ الانتقالات الوهمية
Divergence theorem	Théoreme de divergence	مبرهنة التفرق
Eigenvalue problem	Probleme des valeurs propres	مسألة القيم الذاتية
Eigenvalues	Valeurs propres	القيم الذاتية
Eigenvectors	Vecteurs propres	الأشعة الذاتية
Elasticity , matrix	Elasticité, Matrice d'	مصفوفة المرونة
Element , finite	Element Fini	عنصر منتهي
Element matrix	Matrice Elementaire	مصفوفة العنصر
Energy principles	Principes d'énergie	مبادئ الطاقة
Equilibrium equations	Equations d'Equilibres	معادلات التوازن
Essential boundary conditions	condition aux limites Essentielles	الشروط الطرفية اللازمة
Euler lagrange equations	Equations d'Euler Lagrange	معادلات أويلر لاغرانج
Extremum	Extremum	القيمة الحدية
Field equations	Equations du Champ	معادلات الحقل
Finite element mesh	Maillage des Elements Finis	شبكة العناصر المنتهي
Finite element method	Méthode des	طريقة العناصر المنتهية

	Elements Finis	
First variation	Premiere Variation	المتغير الأول
Force vector	Vecteur des Forces	شعاع القوى
Functional	Fonctionnelle	تابعي
Gauss points	Points de Gauss	نقاط غاوس
Gauss theorem	Théorème de Gauss	مقولة غاوس
Generalized	Généralisé, ée	معمم
Geometrical boundary conditions	Conditions aux limites géométriques	الشروط الطرفية الهندسية
Global coordinates system	Système des Coordonées global	جمله الإحداثيات العامة
Governing equation	Equations gouvernées	المعادلة الحاكمة
Gradient operator	Operateur gradient	معامل التدرج
	Tenseur des Contraintes de Green	موتر غرين للتشوهات
Hermite polynoms	Polynômes d'Hermite	كثيرات حدود هيرميت
Homogeneous material	Materiaux homogenes	مادة متجانسة
	Loi d'Hook	قانون هوك
Hybrid model	Modele hybride	النموذج الهجين
Index	Indice	قرينة
Infini tesimal strain	deformation infinitesi	تشوه لا متناهي في الصغر
Initial conditions	Conditions initiales	الشروط البدائية
Inner product	Multiplication interne	الجداء الداخلي
Inplane stress	Contraintes planes	الإجهاد المستوي

Interlement continuity	Continuité entere element	الاستمرارية بين العناصر
Internal energy	Energie interne	الطاقة الداخلية
Interpolation functions	Fonctions d'interpolation	توابع استنباط
Invariant property	Propriété invariant	خاصة غير متغيرة
Isotropic material	Materiau isotrope	مادة متناحية
Jacobian matrix	Matrice de Jacobie	مصفوفة ياكوبي
Kinetic energy	Energie cinétique	الطاقة الحركية
Kinetics	Cinetique	علم التحريك
Kirchhoff - Love assumptions	Hypothese de Kirchhoff-Love	فرضيات كيرشهوف - لوف
Kroneker delta	Delta de Kroneker	رمز كرونكر
Lagrange multiplier	Multiplieur de Lagrange	مضارب لاغرانج
Laplace operator	Opérateur de Laplace	مؤثر لابلاس
Load	Charge	حمولة
Local coordinates	Coordonnées locales	الإحداثيات المحلية (الخاصة)
Material properties	Propriétés des Matériaux	خواص المادة
Mixed model	Modele Mixte	نموذج مختلط
Moment of inertia	Moment d'Inertie	عزم العطالة
Moment resultants	Moment resultant	محصلة العزوم
Natural coordinates	Coordonnées naturelles	الإحداثيات الطبيعية

Neutral axis	Axes naturelles	المحاور المحايدة ( السليمة )
Neutral surface	Surfaces naturelles	السطوح المحايدة
Nodal degrees of freedom	Degrés de libertés nodales	درجات حرية العقد
Nonconforming element	Element non-conforme (للتسحيم)	العنصر غير المتطابق (للتسحيم)
Nonlinearity	Nonlinéarité	اللاخطية
Normal stress	Contraintes normales	الإجهادات الناعظمة
Numerical convergence of	Convergence numérique de	التقارب العددي
finite element solution	Solution Elements Finis	حللول طريقة العناصر المنتهية
Numerical integration	Integration numérique	التكامل العددي
One dimensional problem	Problèmes unilatérales	المسائل الأحادية البعد
Operator	Operateur	مؤثر
Orthogonality	Orthogonalité	التعامدية
Orthotropic material	Materiau orthotropique	مادة تناحي متعامد
Particular solution	Solution partieuiliere	الحل الخاص
Plane strain	deformation plane	التشوهات المستوية
Plane stress	Contraintes planes	الإجهادات المستوية
Plate	Plaque	بلاطة
Poisson	Ratio de Poisson	معامل بواسون
Potential energy	Energie potentielle	الطاقة الكامنة
Principle of	Principe de -	مبادئ
Complementary energy	Energie complementaire	- الطاقة التتممة
Potential energy	Energie potentionelle	- الطاقة الكامنة

Virtual forces	Forces virtuelles	- القوى الوهمية
Virtual work	Travaille virtuelle	- العمل الوهمي
Quadratic elements	Element Quadratique	عناصر مربعة
Rectangular element	Element Rectangulaire	عناصر مستطيلة
Rigid body motion	Mouvement de corps Rigide	حركة الجسم الصلب
Rigidity	Rigidité	الصلابة
Ritz approximation	Approximation de Ritz	تقريب ريتز
Shear force resultants	Forces de eissaillement resultantes	محصلة القوى القاصة
Shear moduli	Module de eissaillement	معامل مقاومة القص
Shear stresses	Contraintes de eissaillement	إجهادات القص
Shells	Coques	قشريات
Stiffness matrix	Matrice de rigidité	مصفوفة القساوة
Stokes theorem	Théoreme de Stokes	مبرهنة ستوكس
Strain	deformation	تشوه
Stress	Contraintes	إجهاد
Stress strain relation	Relation de Contraites-deformations	علاقات الإجهادات - التشوهات
Surface integral	Integral de surface	تكامل سطحي
Surface traction	Traction surfacique	قوى السحب السطحي
Tensor	Tenseur	موثرة
Thin plates	Plaques minces	بلاطات رقيقة

Torsion	Torsion	فتل
Trefftz	Méthode de Trefftz	طريقة ترفتر
Triangular element	Element triangulaire	عنصر مثلثي
Truss member	membre de treillis	عنصر جاذز شبكي
Unit normal	Vecteur normale	الناظم الواحدي
Unit vector	Vecteur unitaire	شعاع الوحدة
Uniqueness		وحدانية
Variables	Variables	متحولات
Variation	Variation	تغيراتي
Variational calculus	Calcul des variation	حساب المتغيرات
Variational operator	Operateur variationel	مؤثر تغيراتي
Variational principles	Principes variationelles	مبادئ متغيراتية
Virtual	virtuelle	وهمي

المصادر العلمية :

1. Al-Khatib, Ahmed Sh.

A new Dictionary of Scientific and Technical Terms, English-Arabic  
(fifth Edition) , Librairie Du Liban, Riad Solh 1981.

2. Briesc, K. and others

Dictionary English-German , 24<sup>th</sup> edition , VEB Verlag Enzyklopaedie ,  
Leipzig 1980.













يتناول الكتاب طرق العناصر المنتهية المختلفة (نموذج الانتقالات، النموذج الهجين للإجهادات، نموذج ترفنن وتطبيقاتها في حلول مختلف أنواع المنشآت كالجوائز الشبكية المستوية والفراغية، والإطارات المستوية والفراغية، والبلاطات الرقيقة، والشرائح الرقيقة في حالتها الإجهادات المستوية والتشوّهات المستوية. ويقدم معلومات علمية قيمة وحديثة في مجال مبادئ الطاقة وطرق العناصر المنتهية مستخدماً أساليب وأدوات رياضية متطورة.

يخدم الكتاب الباحثين العلميين وأعضاء الهيئة التدريسية في الكثير من مجالات العلوم الهندسية والرياضية والفيزيائية والمهندسين الراغبين في فهم معمق لتطبيقات طرق العناصر المنتهية كما يمكن أن يستخدمه الطالب الراغب في التعرف على العرض العصري للمواضيع المذكورة والتعمق في فهمها.

### المؤلف:

- حصل على الإجازة في الهندسة المدنية من جامعة دمشق بدرجة جيد جداً.
- حاز على الدبلوم والدكتوراه في الهندسة المدنية بدرجة ممتاز من جامعة درسدن في ألمانيا.
- عمل باحثاً ومدرساً في جامعة دارمشتات - ألمانيا من عام ١٩٩١ إلى عام ١٩٩٣.
- يعمل حالياً أستاذاً مساعداً في كلية الهندسة المدنية - جامعة تشرين - اللاذقية.
- مواليد حصين البحر - سورية ١٩٥٧ .
- سيصدر له: طرق الطاقة في ميكانيك الإنشاءات الحطّية - طرق العناصر المنتهية والدنناميك.

